Формула Лейбница

А.ЕГОРОВ

В ПРОШЛОМ номере нашего журнала была опубликована статья А.Котовой «Готфрид Вильгельм Лейбниц». В этой статье упоминалась одна замечательная формула для числа π, доказанная Лейбницем в 1666 году и получившая его имя. Вот она:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots \qquad (1)$$

Здесь мы докажем это и некоторые другие замечательные соотношения.

Геометрическая прогрессия

Рассмотрим сумму

$$S_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}.$$

По известной формуле для суммы первых n членов геометрической прогрессии получаем

$$S_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}. \qquad (2)$$

Будем считать теперь, что $|x| < 1$.

При больших n и фиксированном x выражение $\frac{x^n}{1-x}$ мало по модулю и с ростом n стремится к нулю, так что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1-x} = 0$$

при всяком $x \in (-1; 1)$.

Мы можем также переписать равенство для $S_n(x)$ несколько иначе:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}. \qquad (3)$$

Полученное тождество окажется очень полезным в дальнейшем.

Разглядывая равенство (3), мы приходим к выводу, что точность приближенного равенства

$$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x + \ldots + x^{n-1} = S_n(x)$$

тем выше, чем больше n. Это дает нам основание записать:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

$$\text{при } |x| < 1,$$

понимая под бесконечной суммой в правой части предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x).$$

Мы представили функцию $\frac{1}{1-x}$ в виде *суммы бесконечного ряда*

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots,$$

или, как часто говорят, *разложили эту функцию в ряд* по степеням x (или в степенной ряд).

Для очень широкого класса функций (в частности, для элементарных функций, изучаемых в школе) такие разложения возможны, т.е. возможна запись $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$ Некоторые примеры таких разложений мы увидим дальше.

Разложение в ряд функции $\ln(1+x)$

Теперь от читателя потребуется знакомство с натуральными логарифмами и интегралами (впрочем, в пределах школьного курса математики).

Запишем тождество (3), подставив в него $x = -t$:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + {}$$
$$+ t^2 - \ldots + (-1)^{n-1} t^{n-1} + (-1)^n \frac{t^n}{1+t}, \qquad (3')$$

и проинтегрируем это тождество по t от 0 до x ($|x| < 1$):

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x), \qquad (4)$$

где $R_n(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt$. Иначе говоря (вспомним формулы производной логарифма и Ньютона-Лейбница $\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+t)\Big|_0^x = \ln(1+x)$),

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x).$$

Изучим поведение $R_n(x)$ при $n \to \infty$. Поскольку при $0 < t \le 1$

$$0 < \frac{t^n}{1+t} \le t^n,$$

то и

$$0 \le \int_0^x \frac{t^n dt}{1+t} \le \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \le \frac{1}{n+1}.$$

Поэтому при $0 < x \le 1$

$$|R_n(x)| < \frac{1}{n+1},$$

т.е. при всяком $0 < x \le 1$

$$R_n(x) \to 0,$$

что дает нам право записать

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}. \qquad (5)$$

Упражнение 1. Докажите, что и при $-1 < x < 0$ формула (5) справедлива.

Итак, при всех $-1 < x \le 1$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}.$$

Мы получили разложение в ряд натурального логарифма. Подставляя $x = 1$ в равенство (5), получаем

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots \qquad (6)$$

Разложение арктангенса

Подставляя $-t^2$ в формулу (3) вместо x, получаем тождество

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \ldots$$
$$+ (-1)^{n-1} t^{2n-2} + (-1)^n \frac{t^{2n}}{1+t^2}. \qquad (7)$$

Вспомним теперь формулу для производной арктангенса:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Эта формула не доказывается в курсе средней школы, однако вывод ее с помощью формулы производной тангенса или (для знатоков) формулы производной обратной функции не представляет особого труда.

Упражнение 2. Докажите, что $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

Проинтегрируем равенство (7) от 0 до x:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x 1\,dt -$$
$$- \int_0^x t^2 dt + \ldots + (-1)^{n-1} \int_0^x t^{2n-2} dt +$$
$$+ (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt. \qquad (7')$$