многочленами следует из теоремы Мюрхеда. (См., например, «Квант» №7 за 1985 г., с. 33–36. Статья так и называется: «Как получаются симметричные неравенства».)

Еще одно доказательство неравенства получили на Московской олимпиаде ученики СУНЦ МГУ Илья Ермолаев и Андрей Мищенко.

Приведя левую часть к общему знаменателю и умножив обе части неравенства на этот знаменатель, а затем приводя подобные слагаемые и пользуясь тем, что $2abc = 2$, получим

$$2(a+b+c) \le b^2(a+c) + c^2(a+b) + a^2(c+b).$$

Прибавим к правой части выражение $3abc - 3 = 0$, тогда правая часть примет вид

$$(a+b+c)(ab+bc+ca) - 3;$$

преобразуя неравенство, получим

$$(a+b+c)(ab+bc+ca-2) \ge 3.$$

Остается доказать два неравенства (оба можно вывести из неравенства (1) между средними для трех чисел):

$$a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc} = 3;$$

$$ab+bc+ca-2 \ge 1.$$

Г.Гальперин, В.Сендеров

М1599. *Из последовательности 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, … первых цифр степеней 2 выбираются несколько цифр подряд и записываются в обратном порядке. Докажите, что эти цифры встретятся, начиная с некоторого места, подряд в последовательности первых цифр степеней 5.*

Достаточно доказать, что любой начальный кусок последовательности первых цифр степеней пятерки встречается (перевернутым) в последовательности первых цифр степеней двойки.

Рассмотрим числа: $1/2, 1/4, \ldots, 1/2^n$. Последовательность первых ненулевых цифр их десятичных записей 5, 2, 1, … есть в точности последовательность первых цифр десятичных записей чисел 5, 25, …, 5^n. Таким образом, если добавить отрицательные степени, то утверждение задачи будет выполнено.

Для решения нашей задачи следует «сдвинуть» отрицательные степени. Для этого достаточно показать существование такой степени двойки $x = 2^n$, десятичная запись которой имеет вид 100…0* , где звездочка обозначает оставшуюся часть десятичной записи. В этом случае $2^{n-1} = 2^n/2 = 500\ldots0*$, $2^{n-2} = 250\ldots0*$, $2^{n-3} = 1250\ldots0*$, …

Заметим, что существует бесконечно много степеней двойки, у которых первые k цифр совпадают, причем k можно выбрать сколь угодно большим. Разделим одну такую степень на другую (меньшую). Если мы получим степень двойки, которая начинается с 1 и большого числа нулей, то задача решена. В противном случае получится степень двойки, которая начинается с большого числа девяток. Удвоим k и повторим операцию. Если снова получится степень, которая начинается с девяток, то разделим ее на полученную в предыдущем делении. Полученная степень двойки, как нетрудно видеть, начинается с 1 и большого числа нулей, что и требовалось.

Существование степени 2 вида 100…0*, и вообще начинающейся с любой комбинации цифр, можно получить и из более общих соображений: число $\lambda = \lg 2$ иррационально (поскольку невозможно равенство $2^m = 5^n$ с целыми m и n), а дробная часть $N\lambda - [N\lambda]$ чисел $N\lambda$, $N \in \mathbf{Z}$, при иррациональном λ принимает значения, сколь угодно близкие к любой точке отрезка $[0; 1]$.

А.Канель

Ф1608. *Мэр одного городка начал получать жалобы на большую автомобильную пробку перед светофором на главной улице. Скорость машин при движении составляла 6 м/с, а средняя скорость продвижения по пробке — всего 1,5 м/с. При этом время свечения светофора зеленым светом было равно времени свечения красным (время свечения желтым пренебрежимо мало). Мэр распорядился увеличить время свечения зеленым светом в 2 раза, оставив прежним время свечения красным. Чему станет равна средняя скорость продвижения машин по пробке? Считать, что скорость машин при движении не изменилась. Учесть, что при включении зеленого света автомобили начинают двигаться не одновременно.*

После включения светофора машины действительно начинают двигаться не одновременно: сначала начинают двигаться машины, стоящие непосредственно перед светофором, затем следующие за ними, и т.д. Таким образом, после включения зеленого света вдоль пробки начинает распространяться «волна», причем реально скорость ее распространения сравнима со скоростью движения машин.

Пусть за время $T_з$, пока горит зеленый свет, мимо светофора проезжает часть пробки длиной L. Это время складывается из двух промежутков: времени, необходимого для того, чтобы волна прошла расстояние L, и времени, необходимого для того, чтобы машина успела это расстояние проехать. Если v — скорость машины, u — скорость распространения волны, то

$$T_з = \frac{L}{v} + \frac{L}{u}.$$

Обозначим время свечения светофора красным светом через $T_к$, тогда среднюю скорость продвижения по пробке можно вычислить по формуле

$$V_{ср} = \frac{L}{T_к + L/v}.$$

Из написанных формул для случая, когда $T_з = T_к$, получаем

$$u = \frac{vV_{ср}}{v - 2V_{ср}} = 3\ \text{м/с}.$$

При увеличении времени $T_з$ в два раза средняя скорость продвижения машин по пробке будет равна

$$V_{ср1} = \frac{v}{1 + \frac{T_к}{2T_з}\frac{u+v}{u}} = 2{,}4\ \text{м/с}.$$

Р.Сеннов

Ф1609. *На горизонтальной шероховатой поверхности находятся две одинаковые длинные тонкостенные трубы, оси которых параллельны. Одна труба покоится, а вторая катится по направлению к ней без проскальзывания со скоростью v. Происходит абсо-*