ных: $y = x^\alpha$, поскольку на положительной полуоси $\mathbf{R}_+$ именно они удовлетворяют условию $f(xy) = f(x)f(y)$. (Можно показать, что среди непрерывных функций других таких, кроме нулевой, нет.)

Поскольку для $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \ne 0$, равенство (1) принимает вид $x^\alpha y^{\alpha^2} = x^\alpha y$, можно попробовать взять $\alpha = 1$ и $\alpha = -1$. В самом деле, функции $f_2(x) = x$ и $f_3(x) = \frac{1}{x}$ при $x \ne 0$, $f_3(0) = 0$ удовлетворяют условиям задачи.

Можно ли иначе продолжить функцию с $\mathbf{R}_+$ на всю ось $\mathbf{R}$ с сохранением условий задачи? Нетрудно показать, что ответ отрицателен: построенные нами три функции — это единственные функции, удовлетворяющие условиям задачи и непрерывные на $\mathbf{R}_+$. В самом деле, если f удовлетворяет условию а) задачи, то, как нетрудно проверить, f либо четна, либо нечетна, причем и в первом из этих случаев $f(0) = 0$, если только $f(x) \not\equiv 1$. Далее, если (отличная от нуля) функция $y = f(x)$ удовлетворяет условиям задачи, то из очевидного равенства $f(1) = 1$ и из (2) следует, что $f(-1) = -1$. А отсюда легко следует, что $y = f(x)$ — нечетная функция.

Для любителей математической экзотики заметим, что существуют разрывные (всюду!) функции, удовлетворяющие условиям задачи (доказательство основано на существовании так называемого «базиса Хамеля» в $\mathbf{R}$ над $\mathbf{Q}$).

А.Герко, В.Сендеров

М1595. *В равнобедренном ($AB = BC$) треугольнике $\angle ABC = 80°$, $\angle OAC = 40°$, $\angle OCA = 30°$. Найдите $\angle BOC$.*

Ответ: $\angle BOC = 100°$.

Задача имеет много разных решений, в том числе — использующих тригонометрические функции. Мы приведем два чисто геометрических решения. Первое — по-видимому, самое короткое.

Пусть P — точка пересечения высоты равнобедренного треугольника, опущенной на основание, с отрезком OC

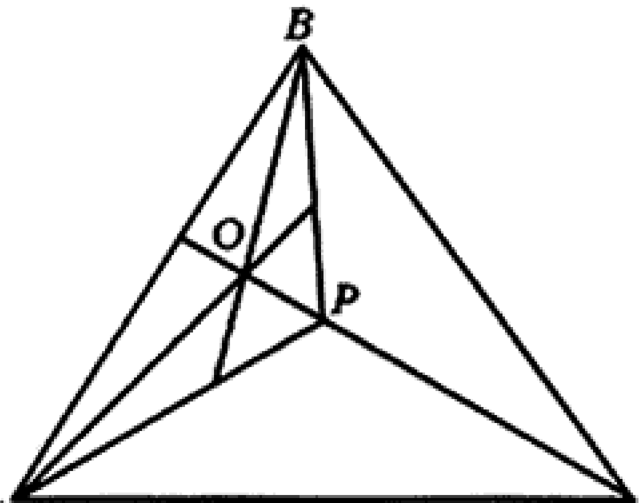

Рис.1

(рис.1). Проведем AP; тогда $\angle PAC = 30°$, $\angle PAB = 20°$, так что AO — биссектриса угла BAP. Докажем, что OP — биссектриса угла APB: $\angle OPA = 180° - \angle APC = 60°$, $\angle APB = 180° - (\angle ABP + \angle BAP) = 120°$. Итак, O — точка пересечения биссектрис треугольника ABP, так что и BO — биссектриса угла ABP, откуда $\angle BOP = 100°$.

Другое решение опирается на метод, описанный в статье В.Прасолова «Диагонали правильного 18-угольника» («Квант» № 5 за 1995 г., с.40). Впишем в окружность с центром B правильный 18-угольник, последовательные вершины которого мы обозначим номерами 1, ..., 18. Можно расположить треугольник ABC так, что A совпадет с вершиной 3, а C — с вершиной 17 (рис.2). Тогда отрезки (3, 13) и (17, 6) идут по отрезкам AO и CO в условии задачи, и остается (пользуясь свойством биссектрис треугольника и соображениями симметрии) проверить, что точка O лежит на пересечении (9, 1) с (11, 2). Мы получим, что центр B лежит на диаметре (2, 11) между точками 0 и 11. Следовательно, $\angle(B, 0, 17) = \angle(11, 0, 17) = 100°$.

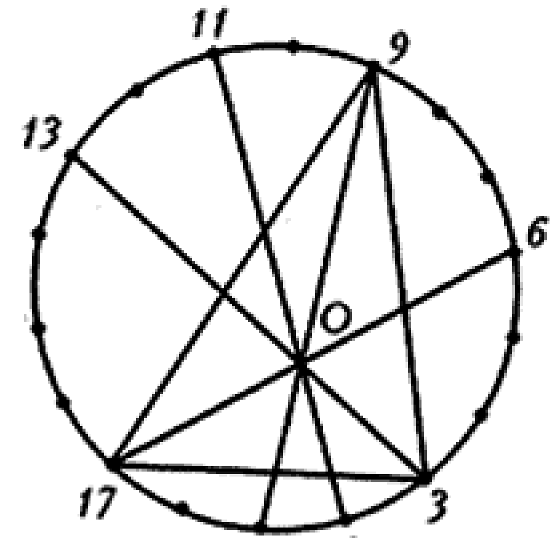

Рис.2

Г.Гальперин, В.Сендеров

М1597. *Пусть a, b, c — положительные числа и $abc = 1$. Докажите неравенства*

а) $\frac{1}{1+2a} + \frac{1}{1+2b} + \frac{1}{1+2c} \ge 1$;

б) $\frac{1}{1+a+b} + \frac{1}{1+b+c} + \frac{1}{1+c+a} \le 1$.

а) Избавляясь от знаменателя и приводя подобные члены, получаем эквивалентное неравенство: $1 + a + b + c \ge 4abc$, или

$$a + b + c \ge 3.$$

Таким образом, мы пришли к неравенству, прямо следующему из «неравенства между средними»:

$$a + b + c \ge 3\sqrt[3]{abc} = 3. \qquad (1)$$

б) Обозначим $a = x^3$, $b = y^3$, $c = z^3$. Поскольку $x^2 - xy + y^2 \ge xy$, имеем $x^3 + y^3 \ge (x+y)xy$, откуда

$$\frac{1}{1+a+b} = \frac{z}{z + z(x^3 + y^3)} \le \frac{z}{z + z(x+y)xy} = \frac{z}{x+y+z}.$$

Складывая это неравенство с двумя аналогичными, получим неравенство задачи.

К заменам $a = x^3$, $b = y^3$, $c = z^3$ можно прийти из следующих естественных соображений: неравенство (после замены 1 на xyz) принимает вид

$$\frac{xyz}{xyz + x^3 + y^3} + \ldots \le 1 \qquad (2)$$

и оказывается однородным. (Заметим, что, как видно из решения а), замены $a = x^2$, $b = y^2$, $c = z^2$ и попытка воспользоваться неравенствами

$$x^2 + y^2 \ge 2xy,\ y^2 + z^2 \ge 2yz,\ z^2 + x^2 \ge 2zx$$

не привели бы к цели.)

Доказывая (2), можно действовать в лоб: именно, преобразовать его к виду

$$2\left(x^5y^2z^2 + x^2y^5z^2 + x^2y^2z^5\right) \le \left(x^3 + y^3\right)z^6 + \left(y^3 + z^3\right)x^6 + \left(z^3 + x^3\right)y^6 \qquad (3)$$

(к такому виду и привел неравенство на Московской олимпиаде1997 года Александр Чернятьев из СУНЦ МГУ).

Справедливость при всех неотрицательных значениях переменных неравенства (3) между симметрическими