су m. Например, $S(0, 1) = 1$; $S(k, 1) = k + 1$ при $k \ge 1$; если $m \ge 2^{k+1}$, то $S(k, m) = 0$.

Мы должны найти (для каждого k) максимальное число $N_k = \max\limits_m S(k,m)$ среди всех $S(k, m)$ и заодно выяснить, для каких m этот максимум достигается.

Удобно конкретный способ взвешивания обозначать такой парой: (сумма гирь на левой чашке; сумма гирь на правой чашке). Например, наибольшее значение $S(2, m)$ равно 3; оно достигается при $m = 1$: (0; 1), (1; 2), (1 + 2; 4) и при $m = 3$: (0; 1 + 2), (1; 4), (2; 4 + 1), так что $N_2 = 3$. Легко видеть, что $N_0 = 1$ (достигается при $m = 0$ и $m = 1$), $N_1 = 2$ (при $m = 1$). Нетрудно показать, что $N_3 = 5$ (достигается при $m = 3 = \mathit{11}$ и $m = 5 = \mathit{101}$). Наклонные цифры означают здесь двоичную запись числа. Пользуясь ею и продолжая эксперимент дальше, можно угадать желанный ответ. Мы сформулируем его ниже.

Пока заметим, что если $m > 2^k$, то $S(m - 2^k, k) > S(m, k)$. В самом деле, при взвешивании $m > 2^k$ обязательно используется гиря 2^k, убрав которую, мы получим взвешивание m без этой гири; но m имеет также взвешивания, использующие 2^k. Таким образом, оптимальные m не превосходят 2^k.

Лемма 1. *Если* $m \le 2^k$, *то*

$$S(m, k) = S(2^k - m, k).$$

Рассмотрим взвешивание m двух типов: (А) использующие гирю 2^k и (В) не использующие ее. Ниже мы считаем, что 2^k не входит в суммы L и R (состоящие из 1, 2, ..., 2^{k-1}).

(А) Взвешиванию $(L, R + 2^k)$ массы $R + 2^k - L = m$ сопоставим взвешивание (L, R) массы $2^k - m = L - R$.

(В) Взвешиванию (L, R) массы $R - L = m$ сопоставим взвешивание $(L + 2^k, R)$ массы $L + 2^k - R = 2^k - m$.

Как нетрудно проверить, мы установили взаимно однозначное соответствие между всеми возможными способами взвешивания масс m и $2^k - m$. (Ясно, что при взвешивании массы $m \le 2^k$ гиря 2^k должна быть на более тяжелой чаше весов.) Лемма доказана.

Появившие в лемме 1 два множества взвешиваний (А) и (В) будут еще использованы. Ниже мы считаем, что $2^{k-1} \le m < 2^k$ и положим $n = 2^k - m$.

Рассмотрим любое взвешивание $(L, R + 2^k)$ массы m типа (А); ясно, что 2^{k-1} не входит в R (так как $m < 2^k$, $1 + 2 + \ldots + 2^{k-2} < 2^{k-1}$). Построим по нему взвешивание массы $m - 2^{k-1}$: $(L, R + 2^{k-1})$, если 2^{k-1} не входит в L, и $(L - 2^{k-1}, R)$ — если входит (мы просто убираем равные массы 2^{k-1} с обеих чаш). Мы получили способ взвешивания массы $m - 2^{k-1}$ набором гирь 1, 2, ..., 2^{k-1}.

Рассмотрим теперь любое взвешивание (L, R) типа (В). Если $R - L = m$, то в R должна входить гиря 2^{k-1} (ведь $m > 2^{k-1}$, и остальных гирь не хватит). Построим взвешивание $(L, R - 2^{k-1})$ массы $2^{k-1} - m$, использующее лишь набор гирь 1, 2, ..., 2^{k-2}.

Ясно, что наши конструкции, как и в лемме 1, обратимы и дают взаимно однозначные соответствия. Тем самым доказана следующая

Лемма 2. *При* $2^{k-1} \le m < 2^k$

$$S(k, m) = S(k - 1, m - 2^{k-1}) + S(k - 2, m - 2^{k-1}).$$

Отсюда следует, что максимум левой части (по m) не превосходит суммы максимумов слагаемых в правой; поэтому $N_k \le N_{k-1} + N_{k-2}$. Но оказывается, что на самом деле выполняется равенство

$$N_k = N_{k-1} + N_{k-2}. \qquad (1)$$

Дело в том, что существует масса $m \ge 2^{k-1}$ такая, что на массе $m - 2^{k-1}$ достигается максимум и N_{k-1}, и N_{k-2}; при этом, разумеется, на m достигается максимум N_k. Это утверждение проверяется по индукции: максимум $S(k, m)$ достигается на двух значениях m

$$\mathit{1010...101} \text{ и } \mathit{1010...1011} \qquad (2)$$

(дающих в сумме $2^k = \mathit{100...0}$); ведь переход от $m - 2^{k-1}$ к m при $m > 2^{k-1}$ — это просто добавление *1* в k-м разряде.

Эта индукция иллюстрируется табличкой, помещенной ниже. (Какое из двух чисел (2) играет роль m, а какое — n, зависит от четности k.) Итак, мы доказали, что N_k удовлетворяет рекуррентному соотношению (1), $N_0 = 1$, $N_1 = 2$, так что N_k равно $(k + 1)$-му члену F_{k+1} ряда Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, ... Поэтому ответы на вопросы а) и б): $N_8 = 55$, $N_9 = 89$.

Таким образом, ответы на вопросы задачи: а) 85 и 171; б) 171 и 341. Это — числа с двоичными записями *1010101*, *10101011* и *101010101*.

k	n	m	2^k	N_k
2	*1*	*11*	4	3
3	*11*	*101*	8	5
4	*101*	*1011*	16	8
5	*1011*	*10101*	32	13
...	...	...	...	...
8	85	171	256	55
9	171	341	512	89

(В колонках n и m указаны массы с максимальным числом взвешиваний, равным N_k.)

Подобно тому как при переводе числа из одной системы счисления в другую можно действовать начиная со старших разрядов, а можно — с младших, у нашей задачи есть другое решение, начинающееся «с младших разрядов». (Первый шаг — доказать, что массы, на которых достигается максимум, нечетны.)

А.Кулаков, А.Шаповалов, Н.Васильев

М1594. *Известно, что* $f(xf(y)) = f(x)y$, *где* $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.
а) Докажите, что $f(xy) = f(x)f(y)$.
б) Придумайте три функции, удовлетворяющие условиям задачи.

а) Подставив в тождество

$$f(xf(y)) = f(x)y \qquad (1)$$

значение $x = 1$, получим (для любого y)

$$f(1)y = f(f(y)). \qquad (2)$$

Подставив в (1) $y = 1$, $x = z$, получим

$$f(z) = f(zf(1)). \qquad (3)$$

Применяя (3) к $z = xy$, затем используем (2) и (1):

$$f(xy) = f(xyf(1)) = f(xf(1)y) = f(xf(f(y))) = f(x)f(y).$$

б) Кроме тривиального примера $f_1(x) = 0$ (при всех x), естественно поискать нужные функции среди степен-