Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 марта 1998 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №6 — 97» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1616» или «Ф1623». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1616 и М1617 предлагались на Соровской олимпиаде по математике 1997 года.

Задачи М1616 — М1620, Ф1623 —Ф1627

М1616. Дана правильная треугольная пирамида $ABCD$ с плоскими углами α при вершине D. Плоскость, параллельная основанию, пересекает ребра DA, DB, DC в точках A_1, B_1, C_1. Поверхность многогранника $ABCA_1B_1C_1$ разрезали по пяти ребрам A_1B_1, B_1C_1, C_1C, CA и AB и полученную развертку уложили на плоскость. При каких α развертка будет (частично) накрывать сама себя?

А.Тарасов, И.Шарыгин

М1617*. Дан правильный шестиугольник со стороной 100. Каждая его сторона разделена на 100 равных частей, и через точки деления проведены всевозможные прямые линии, параллельные сторонам шестиугольника (образующие сетку единичных правильных треугольников). Рассмотрим *произвольное* покрытие шестиугольника единичными ромбами, каждый из которых состоит из двух соседних треугольников сетки. Сколько существует линий сетки, разрезающих пополам (на два треугольника) а) 17 ромбов; б) k ромбов (для каждого $k \geq 1$)? (Зависит ли ответ от покрытия?)

В.Алексеев

М1618*. В вершины правильного n-угольника из его центра проведены n векторов и из них выбраны несколько (не все), сумма которых равна нулю. Докажите, что концы некоторой части выбранной совокупности векторов образуют правильный многоугольник (две симметричные относительно центра точки считаются правильным «двуугольником»), если а) $n = 6$; б) $n = 8$; в) $n = 9$; г) $n = 12$. д) Будет ли аналогичное утверждение верным при любом n?

В.Сендеров

М1619*. Числа x, y, z удовлетворяют условиям

$$x^2 + xy + y^2 = 3,\ \ y^2 + yz + z^2 = 16.$$

Найдите наибольшее возможное значение величины $xy + yz + zx$.

М.Волчкевич

М1620*. Через точку O плоскости проведено n прямых, делящих плоскость на $2n$ углов. В каждый из них вписана окружность, касающаяся сторон на расстоянии 1 от точки O. Лучи занумерованы по порядку, начиная с луча OA_1 (рис. 1). Для произвольно выбранной на луче OA_1 точки M_1 строится ломаная $M_1M_2M_3...M_{2n}\ M_{2n+1}$, вершина M_i которой лежит на

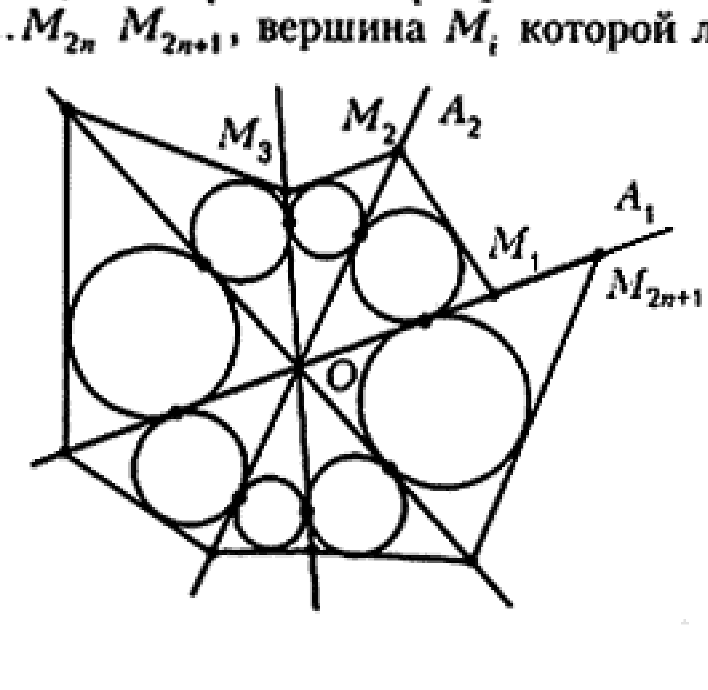

Рис.1

OA_i ($i = 1, 2, ..., 2n$), вершина M_{2n+1} — снова на OA_1, а звено M_iM_{i+1} касается окружности, лежащей в угле A_iOA_{i+1}. Докажите а) для $n = 3$; б) для любого n, что