$\ldots, 2i-1$ (для каждого i от 1 до n; нам удобнее нумеровать α_i не слева направо, как принято обычно, а в обратном порядке, как в языке иврит). В этом нам помогут *диаграммы связей* — полуокружности, с помощью которых мы иллюстрировали формулировки задач.

Итак, пусть у нас есть $2n$ элементов — точек по горизонтальной прямой — и заодно их разбиение на пары (см. рис.1,*а*; удобно на каждой полуокружности поставить стрелку, идущую справа налево). Рассмотрим самый правый элемент и найдем номер $\alpha_n \le 2n-1$ того элемента, с которым он составляет пару (мы считаем, что элементы занумерованы по порядку слева направо: 1, 2, ..., $2n-1$). Уберем эту пару. Останется $2n-2$ элемента. Рассмотрим самый правый из них; остальные (пропустив, если нужно, «бывший» α_n) занумеруем по порядку: 1, 2, ..., $2n-3$ и найдем номер $\alpha_{n-1} \le 2n-3$ элемента, к которому идет полуокружность от самого правого. Удалим и эту пару, и так далее. Так получается набор (α_n, α_{n-1}, ..., α_1), по которому, очевидно, однозначно восстанавливается разбиение на пары.

То же множество наборов (α_n, α_{n-1}, ..., α_1) еще проще сопоставить ГС-перестановкам: по существу, это и делалось в индуктивном решении задачи. Чтобы выбрать место для пары (n, n) в перестановке номеров $\{1, 1, 2, 2, \ldots, n-1, n-1\}$, стоящих возле $2n-2$ точек прямой, мы выбираем один из $2n-1$ лучей и интервалов, на которые эти точки делят прямую. Можно занумеровать эти интервалы слева направо: 1, 2, ..., $2n-1$ и найти номер α_n соответствующего интервала. В оставшейся ГС-перестановке из $2n-2$ элементов точно так же выбирается (после выбрасывания пары (n, n)) номер α_{n-1}, задающий место для пары $(n-1, n-1)$, и так далее (см. «код» на рис. 4).

Ясно, что по «коду» (α_n, α_{n-1}, ..., α_1) мы легко строим и ГС-перестановку, и разбиение; тем самым, мы установили между ними универсальную биекцию.

Заметим, что отыскание красивых 1-1-соответствий в комбинаторике — задача даже более глубокая, чем поиск простых явных формул для количества объектов. Ведь очень часто таких формул просто нет.

Не менее сильным инструментом в изучении комбинаторных объектов служат *производящие функции*.

Если у нас есть некоторая последовательность a_m (скажем, выражающая количество каких-то объектов в зависимости от параметра $m \ge 0$), то производящая функция — это формальный степенной ряд

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m + \ldots$$

Например, для числа C_{100}^m m-элементного подмножества множества $\{1, 2, \ldots, 100\}$ производящая функция будет просто многочленом:

$$C_{100}^0 + C_{100}^1x + C_{100}^2x^2 + \ldots + \ldots + C_{100}^{100}x^{100} = (1+x)^{100}.$$

Когда, как в этом примере, производящую функцию удается «свернуть» или выразить через другие функции, нередко можно получить массу интересных соотношений между коэффициентами или хорошие оценки для них. Разумеется, в задачах с несколькими параметрами используются и производящие функции от нескольких переменных, например,

$$\sum_{n\ge0}\sum_{m=0}^{n} C_n^m x^m y^n = \sum_{n\ge0}(1+x)^n y^n = \frac{1}{1-y-xy}.$$

В заключительном разделе мы приведем еще несколько трудных задач, где участвуют производящие функции для перечисляющих последовательностей, связанных с ГС-перестановками и другими аналогичными комбинациями.

Задачи «на десерт»

Раньше мы интересовались всевозможными разбиениями множества из $2n$ элементов на пары. Теперь же поставим более общий вопрос о разбиении произвольного множества из p элементов на q блоков без каких-либо специальных ограничений. Пусть $S(p, q)$ — число таких разбиений.

Вернемся к ГС-перестановкам.

Назовем *спадом* (или спуском, или десантом) пару соседних чисел, если левое из этих чисел больше правого. Пусть $B_{k,i}$ — число ГС-перестановок с ровно $i-1$ спуском на мультимножестве $\{11, 22, \ldots, kk\}$.

Задача 1 (очень трудная). Докажите, что

$$(1-x)^{2k+1}\sum_{n=1}^{\infty} S(n+k, n)x^n = \sum_{i=1}^{k} B_{k,i}x^i.$$

(Напомним, что степенные ряды перемножаются так же, как и многочлены, которые тоже можно рассматривать как ряды, коэффициенты которых, начиная с некоторого места, равны 0.)

Задача 2 (трудная). Докажите тождество, установленное недавно В.С.Шевелевым:

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{m-j}C_{2m}^{m-j}S(m+j, j) = (2m-1)!!$$

Задача 3 (менее трудная, чем задачи 1 и 2). Докажите, что $S(n+k, n)$ является многочленом от n степени $2k$, и найдите коэффициент этого многочлена при n^{2k}.

(**Ответ.:** $\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!}$.)

Мы надеемся, что нам удалось познакомить вас с «кухней» современной перечислительной комбинаторики. На этой «кухне» мы встретились с несколькими замечательными математиками, а в заключение у нас появилась возможность попробовать собственные силы в увлекательной науке, имя которой — комбинаторика.

Список рекомендуемой литературы

1. *Н.Я.Виленкин, О.С.Ивашев-Мусатов, С.И.Шварцбурд.* Алгебра и математический анализ (для школ с углубленным изучением математики). Часть II. М.: Просвещение, 1990.

2. *Ю.Ионин.* Сколько вариантов? Приложение к журналу «Квант» №2/94.

3. *Г.Радемахер, О.Теплиц.* Числа и фигуры. М.: Наука, 1966. Раздел 9 (см. также разделы 7,2 и 11).

4. *И.С.Соминский.* Элементарная алгебра (дополнительный курс). Изд. 3-е (или любое другое). М.: Наука, 1967. Глава 2.

5. *В.А.Кречмар.* Задачник по алгебре (любое издание). Раздел 9. Задачи 36—40.