число разбиений равно

$$\frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(2n)!}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n} = 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1).$$

Это число обозначается $(2n-1)!!$ (читается: «$2n-1$ двойной факториал»; вы, конечно, знаете, что $n!$ читается «n факториал»). Как мы и обещали, оно встретится нам еще не раз.

Задача о ГС-перестановках

Здесь, так же как и для обычных перестановок, формула для числа $P_{\text{ГС}}(n)$ перестановок Гесселя — Стенли легко выводится с помощью индукции. Заметим, что, как следует из ГС-условия, пара элементов n, n в перестановке из $2n$ элементов $\{1, 1, 2, 2, \ldots, n, n\}$ должна стоять рядом. Представим перестановку (ГС-перестановку!) из $2n-2$ элементов $\{1, 1, 2, 2, \ldots, n-1, n-1\}$ как $2n-2$ точек прямой, делящих ее на $2n-1$ частей (два луча и $2n-3$ отрезка). В любую из этих частей мы можем поместить рядом пару (n, n) и получить $2n-1$ разных ГС-перестановок. Таким образом, при переходе от $n-1$ к n число ГС-перестановок увеличивается в $(2n-1)$ раз. Отсюда по индукции получаем

$$P_{\text{ГС}}(n) = 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1) = (2n-1)!!$$

Конечно, вполне естественно было бы здесь обсудить такой вопрос:

сколько вообще существует различных перестановок — не обязательно удовлетворяющих ГС-условию — «мультимножества» $\{1, 1, 2, 2, \ldots, n, n\}$ из $2n$ элементов?

(Слово «мультимножество» означает, что некоторые элементы встречаются более одного раза — в отличие от обычного множества, где элементы считаются различными.)

Эту задачу — несложную — предлагаем решить читателям.

Мы приведем ответ на более общий вопрос: перестановок мультимножества $\{1, 1, \ldots, 1; 2, 2, \ldots, 2; \ldots; n, n, \ldots, n\}$, в котором i встречается k_i раз (в старой терминологии — *перестановок с повторениями*) существует

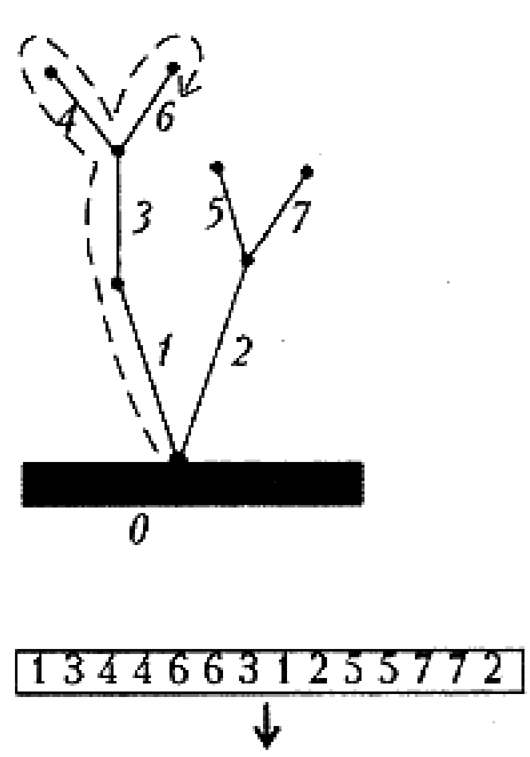
$$(k_1+k_2+\ldots+k_n)!/(k_1!k_2!\ldots k_n!).$$

Задача о монотонных плоских деревьях

Эту задачу тоже можно решить по индукции (подумайте, в какое количество мест можно вставить последнюю n-ю ветку дерева). Но мы для разнообразия поступим иначе. Мы докажем, что число таких деревьев с n ветками равно $(2n-1)!!$, установив взаимно однозначное соответствие между ними и ГС-перестановками мультимножества $\{1, 1, 2, 2, \ldots, n, n\}$. Аналогичное 1-1-соответствие (или, пользуясь французским термином, *биекция*) было, по-видимому, впервые предложено в 1967 году голландским математиком Николасом Говертом де Брейном и его соавтором Б.Морсельтом для иных целей.

Представим себе, что n ветвей занумерованного плоского дерева D с корнем O — это каналы (или — притоки реки, впадающей в озеро O). Пройдем от точки O, начав, скажем, с левого берега, вдоль всех каналов и вернемся в O, записывая последовательно номера всех встречавшихся нам каналов (рис.4). Каждый номер встретится дважды. При этом, если нумерация монотонна, то полученная перестановка мультимножества $\{1, 1, 2, 2, \ldots, n, n\}$, очевидно, будет удовлетворять ГС-условию (весь путь от того момента, когда мы прошли по левому берегу i-го канала, до того, как пришли к его правому берегу, проходит по каналам с номерами, большими i).

Обратно, по любой ГС-перестановке номеров $\{1, 1, 2, 2, \ldots, n, n\}$ строится соответствующее монотонное плоское дерево с n ветвями: можно представить себе, что номера перестановки написаны в $2n$ клетках на полоске бумаги, которую мы кладем «ребром» на плоскость, сгибаем сначала в тех местах, где рядом стоят равные номера (в частности, пара (n, n)) и постепенно склеиваем все клетки с равными номерами.



код:
12, 5, 8, 3, 2, 1, 1

Рис. 4

Итак, в задаче о деревьях ответ тот же: $(2n-1)!!$ Но если совпадение ответов во второй и третьей задачах мы объяснили, то с первой это совпадение выглядит достаточно случайным. Так ли это — обсудим в следующем разделе.

Универсальная биекция

Слово «биекция» нам уже встречалось — это точный математический термин, означающий взаимно однозначное соответствие между двумя множествами X и Y, т.е. отображение X на Y, при котором каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие элемент $y \in Y$. Разумеется, между любыми двумя конечными множествами X и Y с одинаковым числом элементов N можно установить какую-либо биекцию.

Упражнение. Докажите, что это можно сделать $N!$ способами.

Но когда речь идет о сложных комбинаторных объектах, *какая-то* биеция не слишком интересна. Замечательно, если правило, устанавливающее соответствие, достаточно простое, позволяющее по данному $x \in X$ сразу найти соответствующее ему $y \in Y$ и обратно, по y найти x. Это и есть (не совсем строго математическое) свойство, которое мы подразумеваем, говоря об универсальной биекции.

Приведем пример.

Каждому подмножеству множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ можно сопоставить его «код» — строчку длины n из цифр 0 или 1 (на i-м месте стоит 1, если i входит в подмножество, и 0 — если нет). Это — хорошо известная универсальная биекция. Она позволяет даже занумеровать все 2^n подмножеств: ведь «код» — строчку из 0 и 1 — можно рассматривать как двоичную запись числа от 0 до 2^{n-1}.

Вернемся теперь к задаче 1. Мы покажем, что в этой задаче — как и в задаче 2 — можно построить естественную биекцию с множеством наборов $(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1)$, где α_i принимает $2i-1$ значений 1, 2, …