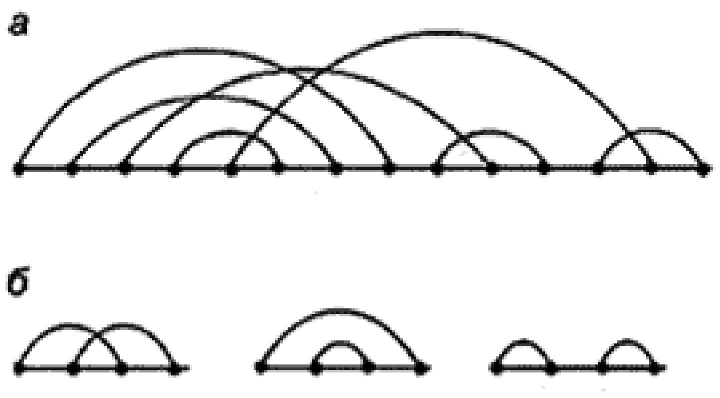

Рис. 1

точках пары (рис.1,*а*). Например, для $n = 2$ существует 3 различных разбиения множества {1, 2, 3, 4} на пары (рис.1,*б*).

Задача о ГС-перестановках. Сколько существует перестановок из $2n$ элементов $\{1, 1, 2, 2, \ldots, n, n\}$ (каждое i от 1 до n входит в перестановку два раза!), удовлетворяющих следующему дополнительному *условию Гесселя — Стенли*: для любого $i < n$ все элементы, расположенные в перестановке между двумя вхождениями i, больше i?

Такие перестановки (мы будем называть их ГС-перестановками) рассматривались в статье, которую опубликовали в 1978 году два американских математика — Айра Гессель и Ричард Стенли. Каждую ГС-перестановку можно изобразить так. Расставим $2n$ точек на горизонтальной прямой, нарисуем в нижней полуплоскости n полуокружностей с концами в этих точках, *не пересекающихся* между собой (даже не имеющих общих концов) и расставим номера 1, 2, ..., n на полуокружностях так, чтобы полуокружность, лежащая выше другой, имела больший номер; например, рисунок 2,*а* изображает ГС-перестановку 13446631255772 — концы i-й полуокружности указывают, где расположены два вхождения элемента i в перестановку.

На рисунке 2,*б* изображены все 3 возможные ГС-перестановки для $n = 2$.

Задача о монотонных плоских корневых деревьях. В теории графов (граф — это система точек — *вершин*, — некоторые пары которых

Рис. 2

соединены отрезками — *ребрами* графа) *деревом* называется связный граф без *циклов*, т.е. граф, в котором для любых двух вершин есть только один путь, ведущий из одной в другую по (разным) ребрам. Мы будем рисовать деревья, растущие вверх из *корня* — некоторой точки O горизонтальной прямой l — и состоящие из n ребер — стрелок: одно или несколько ребер начинаются в точке O; из их концов, удаляясь от прямой l, могут расти еще несколько ребер, и так далее. Ребра занумерованы числами от 1 до n, причем *монотонно*: ребра, растущие из вершины, где заканчивается ребро i, должны иметь номера, большие i. При этом длины и направления ребер не принимаются во внимание, но если из какой-то вершины выходит несколько ребер, то важен порядок, в котором они расположены на плоскости (какое — левее, а какое — правее). Сколько существует различных монотонных плоских деревьев с n ребрами? Одно такое дерево изображено на рисунке

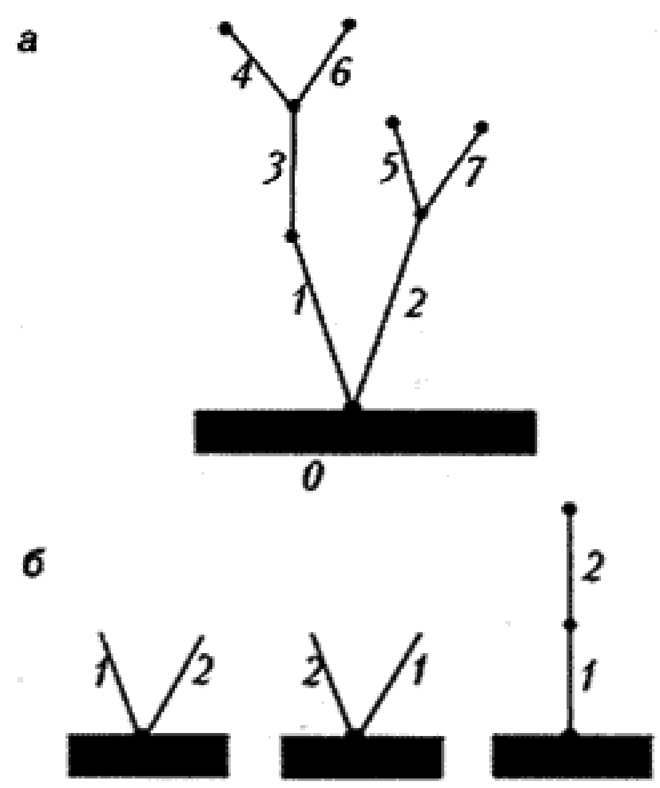

Рис. 3

3,*а*. А на рисунке 3,*б* изображены все 3 различные дерева для $n = 2$.

Замечательно, что во всех трех этих столь разных на вид задачах один и тот же ответ — не только для $n = 2$, но и для любого n.

Разберем их по порядку.

Число разбиений

Напомним сначала две основные формулы комбинаторики.

Общее число различных перестановок из n элементов $\{1, 2, \ldots, n\}$ равно

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n. \qquad (1)$$

Это легко доказывается по индукции, например, так. Представим себе перестановку из $n - 1$ элементов как $n - 1$ точек на прямой, обозначенных в некотором порядке 1, 2, ..., $n - 1$. Эти точки делят прямую на n частей: луч слева от самой левой точки, отрезок между ней и соседней точкой, ..., луч слева от самой правой точки. Новую точку n можно поместить в каждую из этих частей. Таким образом, при переходе от $n - 1$ к n число перестановок увеличивается в n раз. Отсюда получается формула (1).

Число C_n^k различных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, состоящих из k элементов, равно

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (2)$$

(при этом считается, что $0! = 1$). Эту формулу легко получить из (1), пользуясь тем, что в подмножестве (в отличие от перестановок) порядок расположения элементов не принимается во внимание. Рассмотрим любую из $n!$ перестановок элементов $\{1, 2, \ldots, n\}$ и условимся считать, что первые k элементов мы включаем в подмножество, а последние $(n - k)$ — нет. Тогда каждое определенное подмножество будет получаться из $k!(n - k)!$ перестановок: ведь в ней первые k элементов можно переставить $k!$ способами и, независимо от этого, последние $(n - k)$ элементов — $(n - k)!$ способами (тут используется основное в комбинаторике «правило произведения»). Поэтому общее число перестановок $n!$ равно $C_n^k k!(n-k)!$, откуда получается формула (2). Заметим, что в ней можно провести сокращения и записать ее так:

$$C_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1)/k! =$$
$$= n(n-1)\ldots(k+1)/(n-k)!$$

Точно такими же рассуждениями решается и задача о числе разбиений множества из $2n$ элементов на n (неупорядоченных) пар. Сопоставим каждой перестановке $(i_1, i_2, i_3, i_4, \ldots, i_{2n-1}, i_{2n})$ из $2n$ элементов $(1, 2, \ldots, n)$ такое разбиение на пары: (i_1, i_2), (i_3, i_4), ..., (i_{2n-1}, i_{2n}). Тогда каждое разбиение будет получаться из $2^n n!$ перестановок: ведь в каждой паре можно (двумя способами) переставить элементы друг с другом — это дает множитель 2^n — и, кроме того, n пар можно переставить как угодно между собой. Итак, ответ: