О логичных и нелогичных турнирах

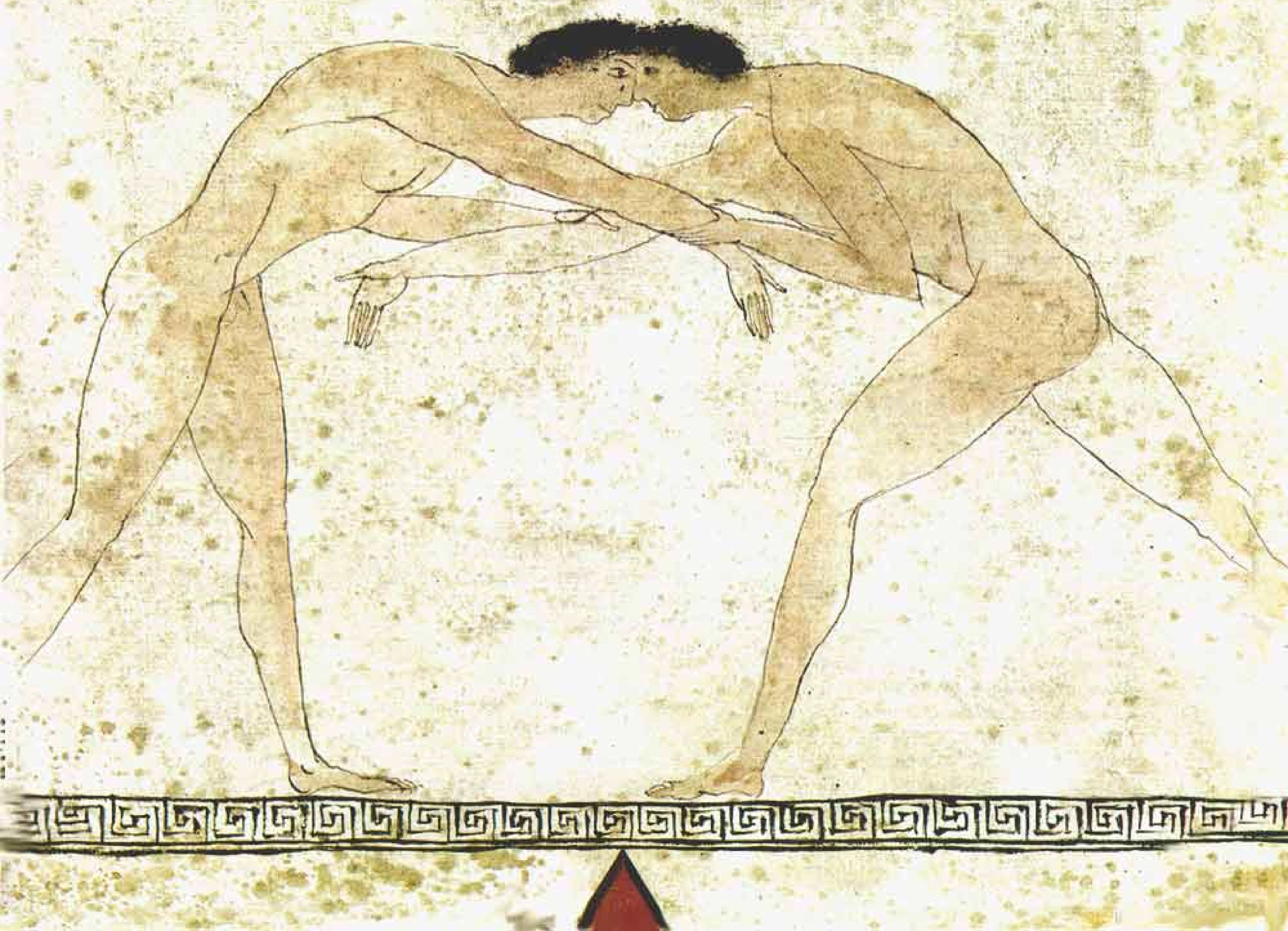
А. ЗАСЛАВСКИЙ

История спортивных состязаний, судя по всему, насчитывает ненамного меньше времени, чем история человечества. Очевидно, что уже много веков назад люди стали выяснять, кто самый быстрый, самый сильный и т.д. На некоторые из этих вопросов ответ получить нетрудно. Например, чтобы понять, кто быстрее бегает, достаточно провести один забег с участием всех претендентов. Значительно сложнее определить сильнейшего из многих участников, если одновременно принять участие в состязании могут лишь двое из них, как в борьбе, шахматах или спортивных играх. Принято считать, что наиболее объективной является так называемая круговая система, при которой каждый участник встречается с каждым и сильнейшим объявляется тот, кто набрал наибольшее число очков или одержавший наибольшее число побед (в турнире без ничьих). По такой системе определяются, например, чемпионы европейских стран по футболу. Правда, ныне чаще применяют олимпийскую систему (проигравший выбывает), но это вызвано не сомнениями в объективности круговых турниров, а большей трудоемкостью их проведения. Попробуем оценить достоинства и недостатки круговой системы.

Предположим, что четыре шахматиста провели однокруговой турнир, который принес следующие результаты:

	1	2	3	4
1	–	1	1	0
2	0	–	1/2	1
3	0	1/2	–	1
4	1	0	0	–

Казалось бы, первый участник является сильнейшим, а последний слабейшим. Однако результат их личной встречи позволяет предположить, что четвертый шахматист играет сильнее первого. Таким образом, информация, сообщаемая таблицей турнира, является противоречивой.



Попробуем разобраться в причинах этой противоречивости. Рассмотрим участников турнира с номерами 1, 2, 4 (или 1, 3, 4). Результаты встреч второго участника говорят о том, что он сильнее четвертого, но слабее первого. Тем самым, первый участник должен играть лучше четвертого и, следовательно, выигрывать у него. Поскольку в действительности этого не происходит, рассмотренную тройку участников следует признать нелогичной (в математике обычно такие тройки называются нетранзитивными). Итак, противоречивость нашего турнира вызвана тем, что он содержит две нетранзитивные тройки (две другие тройки, очевидно, являются вполне логичными).

Теперь естественно сделать следующий шаг и определить степень нелогичности турнира как число его нетранзитивных троек. В частности, степень нелогичности рассмотренного турнира равна 2. Однако число различных троек быстро возрастает с ростом числа участников турнира (при n участниках оно равно $n(n-1)(n-2)/6$, поэтому возникает вопрос, существует ли способ вычисления степени нелогичности турнира более простой, чем перебор всех возможных троек. Решением этого вопроса мы сейчас и займемся.

Рассмотрим сначала турнир без ничьих (например, баскетбольный), в котором за победу присуждается 1 очко, а за поражение — 0 очков. В этом случае формула для определения числа нетранзитивных троек хорошо известна:

$$NT = n(n-1)(2n-1)/12 - \Sigma s_i^2/2, \quad (1)$$

где NT — число нетранзитивных троек, n — число участников турнира, s_i — количество очков, набранных i-м участником.

Доказательство. Пусть все партии, кроме партии участников с номерами 1 и 2, сыграны. Очевидно, что результат последней партии влияет на транзитивность только тех троек, в которые входят оба ее участника. Пусть в партиях с остальными участниками 1 и 2 набрали соответственно s_1 и s_2 очков, причем число участников, у которых они оба выиграли, равно x_{11}, число участников, у которых 1 выиграл, а 2 проиграл — x_{12}, 2 выиграл, а 1 проиграл — x_{21}, оба проиграли — x_{22}. Ясно, что выполняются такие соотношения:

$$x_{11} + x_{12} = s_1,$$
$$x_{11} + x_{21} = s_2,$$
$$x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} = n-2.$$

Эти соотношения показывают, что если s_1 и s_2 известны, то, зная одно из чисел x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, можно определить остальные. В частности, $x_{12} = n - 2 - s_2 - x_{22}$, $x_{21} = n - 2 - s_1 - x_{22}$.

Рассмотрим теперь различные исходы последней партии.

1) *Победа игрока 1.* В этом случае 1 набирает $s_1 + 1$ очко, у 2 остается s_2. Правая часть формулы (1) принимает вид

$$C_1 - (s_1+1)^2/2 - s_2^2/2,$$

где C_1 — полусумма квадратов очков остальных участников, не зависящая от исхода последней партии.

Тройка с участием 1 и 2 будет нетранзитивной тогда и только тогда, когда третий ее участник выигрывает у 1 и проигрывает 2. Поскольку число таких троек равно x_{21}, левую часть формулы можно записать в виде $C_2 + x_{21}$, где C_2 не зависит от исхода партии.

2) *Победа игрока 2.* Рассуждая аналогично, получаем для правой части (1)

$$C_1 - (s_2+1)^2/2 - s_1^2/2,$$

а для левой $C_2 + x_{12}$.

Используя найденные ранее выражения для x_{12}, x_{21}, получаем, что разность левой и правой части в обоих случаях равна

$$C_2 - C_1 + s_1^2/2 + s_2^2/2 + 1/2 + n - 2 - x_{22}.$$

Таким образом, эта разность не зависит от результата произвольной партии, и, значит, одинакова для всех турниров. Рассмотрим теперь турнир, в котором первый участник выиграл у всех остальных, второй — у всех, кроме первого, и т.д. Для этого турнира число нетранзитивных троек равно нулю, а количества очков $s_1 = n-1$, $s_2 = n-2$, …, $s_n = 0$. Используя формулу суммы квадратов натурального ряда, убеждаемся, что формула (1) для этого турнира верна. Следовательно, она верна для всех турниров.

Упражнение 1. Докажите, что максимальное число нетранзитивных троек равно $(n^3-n)/24$ при нечетном n и $(n^3-4n)/24$ при четном.

Прежде чем переходить к турнирам с ничьими, обратим внимание на одно обстоятельство. Может возникнуть вопрос, почему нелогичность турнира следует измерять именно числом нетранзитивных троек, а не циклов другой длины (циклом длины k называются такие k участников, что первый из них выиграл у второго, второй у третьего, …, k-й у первого). Аргументировать выбор такой меры можно так: во-первых, нелогичность нетранзитивной тройки представляется более очевидной, чем нелогичность длинного цикла, во-вторых, длинные циклы в определенном смысле порождаются нетранзитивными тройками. Точнее, выполняется следующее утверждение: *если в турнире есть цикл длины k, то найдется не менее чем $k-2$ нетранзитивные тройки.*

Упражнение 2. Докажите это.

Теперь попробуем обобщить формулу (1) на случай турниров с ничьими. Прежде всего заметим, что знать количество очков, набранных каждым участником, явно недостаточно. Действительно, рассмотрим два турнира с $n = 3$ и такими таблицами:

–	1	0		–	1/2	1/2
0	–	1		1/2	–	1/2
1	0	–		1/2	1/2	–

Количества набранных участниками очков в этих турнирах совпадают, но в первой тройке транзитивность нарушена, а во второй — нет.

Поэтому будем считать, что для каждого участника нам известно не только количество набранных очков, но и количество выигрышей, ничьих и поражений, соответственно v_i, n_i, p_i. Разумеется, $v_i + n_i + p_i = n - 1$ для любого i.

Теперь необходимо уточнить понятие степени нелогичности. Действительно, в отличие от турнира без ничьих, в турнире с ничьими возможны три типа нетранзитивных троек, а именно:

–	1	0		–	1	1/2
0	–	1		0	–	1
1	0	–		1/2	0	–

–	1/2	1
1/2	–	1/2
0	1/2	–

Считать вклад всех этих троек в общую нелогичность одинаковым вряд ли разумно. Первая тройка представляется наиболее нетранзитивной, а третья — наименее. Поэтому имеет смысл приписать тройкам первого типа вес 1, второго x, третьего y, где $y \le x \le 1$. Выбор этих весов может диктоваться различными соображениями, но оказывается, что степень нелогичности выражается через v_i, n_i, p_i лишь в одном случае. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим две пары турниров:

1)

$$\begin{array}{ccccc} - & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & - & 1 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & - & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 0 & - & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & - \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} - & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & - & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & - & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & - & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & - \end{array}$$

2)

$$\begin{array}{ccccc} - & 1/2 & 1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & - & 1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & - & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & - & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & - \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} - & 1 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & - & 1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & - & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & - & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & - \end{array}$$

В обеих парах числа v_i, n_i, p_i совпадают для всех i. Непосредственно перебрав все тройки и приравняв для каждой пары суммарные нетранзитивности, получим:

$$\begin{cases} 1+9y = 3x+6y, \\ 1+2x+3y = 4x+3y. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $x = 1/2$, $y = 1/6$.

Осталось выяснить, существует ли при таких весах формула, аналогичная (1). Ответ на этот вопрос положительный. Приведем результат:

$$NT = \left(\left(n^3 - n\right) - \sum n(n_i + 2) - 3\sum (v_i - p_i)^2\right)\Big/24. \quad (2)$$

Доказательство. Вновь предположим, что все партии турнира, кроме партии между участниками с номерами 1 и 2, уже сыграны. Пусть v_1, n_1, p_1, v_2, n_2, p_2 — число выигрышей, ничьих и проигрышей каждого из двух игроков без учета партии между ними, а результаты остальных участников в партиях с ними задаются таблицей

$$\begin{array}{cccc} 1/2 & 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 1/2 & x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 0 & x_{31} & x_{32} & x_{33}\,. \end{array}$$

где x_{11} — количество участников, у которых и первый и второй игрок выиграли, x_{12} — количество участников, у которых первый игрок выиграл, а второй сыграл вничью и т.д.

Упражнение 3. Выведите соотношение между числами x_{ij}, v_i, n_i, p_i.

Полученные соотношения показывают, что при заданных v_i, n_i, p_i лишь часть x_{ij} можно выбирать произвольно. Например, если известны x_{11}, x_{13}, x_{31}, x_{33}, остальные числа в таблице определяются однозначно.

Упражнение 4. Выразите все x_{ij} через x_{11}, x_{13}, x_{31}, x_{33}.

Теперь можно приступать к доказательству (2). Рассмотрим три возможных исхода последней партии: победа 1, победа 2, ничья.

Упражнение 5. Получите выражения для левой и правой частей формулы (2) в каждом из трех случаев.

Упражнение 6. Используя результаты упражнений 4 и 5, покажите, что разность левой и правой частей (2) во всех трех случаях одна и та же.

Из результатов упражнения 6 следует, что разность левой и правой частей постоянна для всех турниров. Для завершения доказательства можно было бы рассмотреть какой-нибудь конкретный турнир. Но поскольку у нас уже есть формула (1), можно поступить проще.

Упражнение 7. Докажите, что при $n_i = 0$ для всех i (2) переходит в (1).

Из упражнения 7 следует, что для турниров без ничьих формула (2) верна. Следовательно, она верна для всех турниров.

Исследовав формулу (2), можно увидеть, что максимальная нетранзитивность для турнира без ничьих такая же, как для турнира с ничьими. При нечетном n она достигается, если при всех i имеем $n_i = 0$, $v_i = p_i = (n-1)/2$, при четном, если при всех i либо $n_i = 0$, $v_i - p_i = \pm 1$, либо $n_i = 1$, $v_i + p_i + (n-2)/2$. Рассмотренный в начале статьи турнир четырех участников, очевидно, удовлетворяет этим условиям и, следовательно, является максимально нелогичным.

В заключение — несколько слов о «практической» значимости приведенных результатов. Конечно, измерять противоречивость спортивных турниров никому не нужно. Однако есть область прикладной математики, где подобные рассмотренным результаты используются. Это — теория экспертных оценок. Во многих прикладных задачах нередко требуется выбрать наилучший объект из некоторой совокупности, причем выбор является неформализованным и может быть осуществлен только с помощью экспертов. Опыт показывает, что эксперту легче ответить на вопрос, какой из двух объектов является лучшим, чем сравнивать сразу несколько объектов. Поэтому, когда число сравниваемых объектов не очень велико, целесообразно пользоваться так называемым методом парных сравнений, при котором эксперту предъявляются все пары возможных объектов и его ответы заносятся в таблицу типа турнирной. При этом эксперту может разрешаться или не разрешаться объявлять объекты равноценными, что соответствует турнирам без ничьих и с ничьими. Чтобы на основании ответов эксперта можно было сделать обоснованный выбор, необходимо, чтобы они были достаточно логичны. Для проверки логичности и используется формула (1), которую можно найти в большинстве книг по методу парных сравнений. Как правило, при проведении экспертиз опрашиваются несколько экспертов, после чего определяется коллективное мнение. В методе парных сравнений эксперты, у которых число нетранзитивных троек превышает некоторое критическое значение, исключаются из рассмотрения, а мнения остальных учитываются с различными весами (предполагается, что большое число нетранзитивных троек свидетельствует о невысокой компетентности эксперта и, следовательно, его мнение имеет небольшой вес). Применяется ли для сравнений с ничьими формула (2), мне неизвестно. Впрочем, следует отметить ее искусственность, связанную с выбором весов для троек разных типов. Действительно, то, что нетранзитивность тройки второго типа вдвое меньше, чем первого, представляется достаточно разумным, но почему тройка третьего типа должна иметь нетранзитивность $1/6$, остается малопонятным. Если удастся найти доводы в пользу такого веса, ценность формулы (2) значительно возрастет.