Задачи с параметром

В.ВАВИЛОВ

ЗАДАЧИ с параметром весьма разнообразны как по содержанию и формулировкам, так и по методам их решения.

Наиболее существенной частью решения задачи с параметром часто является переход к более простой равносильной ей (т.е. имеющей то же множество решений) задаче.

В этой статье мы разберем несколько примеров таких задач.

Помогает область определения

Каждое уравнение, неравенство, система и т.д. имеют свою область определения, а анализ условий, ее определяющих, как правило, является необходимой (а часто и значительно упрощающей) частью решения задачи.

Пример 1. *При каждом значении a решите уравнение*

$$\sqrt{xa-2}+\sqrt{2-ax}=x^2-5x+6.$$

Решение. Условия, определяющие возможные значения x и a, можно записать в виде системы

$$\begin{cases} xa-2\ge 0, \\ 2-ax\ge 0; \end{cases}$$

поэтому $ax=2$. Таким образом, исходное уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} x^2-5x+6=0, \\ ax=2. \end{cases}$$

Отсюда:

если $a=2/3$, то $x=3$;

если $a=1$, то $x=2$;

если $a\ne 0$ и $a\ne 2/3$, то решений нет.

Пример 2. *При каждом значении a решите неравенство*

$$\log_{a-x}(x-a-1)\ge -1.$$

Решение. Область определения данного неравенства задается условиями $x-a-1>0$, $a-x>0$, $a-x\ne 1$. Однако неравенства $x-a--1>0$ и $a-x>0$ не имеют общих решений. Значит, область определения неравенства не содержит никаких пар чисел x и a, а поэтому неравенство не имеет решений.

Пример 3. *При каждом значении a решите систему неравенств*

$$\begin{cases} \log_{2-x}(2-a)>0, \\ \log_{4-a}(2x-2)>0. \end{cases}$$

Решение. Область определения данной системы задается следующими условиями: $2-x>0$, $2x-2>0$, $2-x\ne 1$, $4-a>0$, $2-a>0$, $4-a=1$.

Отсюда находим, что

$$1<x<2 \text{ и } a<2.$$

При таких ограничениях на значения x и a для оснований логарифмов исходной системы имеем

$$0<2-x<1 \text{ и } 4-a>2.$$

Таким образом, данная система равносильна системе

$$\begin{cases} 1<x<2, \\ a<2, \\ 0<2-a<1, \\ 2x-2>1, \end{cases}$$

которая легко решается и дает следующий ответ:

если $1<a<2$, то $3/2<x<2$;

при других значениях a решений нет.

В задачах с неизвестным x и параметром a под областью определения понимается множество всех упорядоченных пар чисел $(x; a)$, каждая из которых такова, что после подстановки соответствующих значений x и a во все входящие в задачу соотношения они будут определены. Поэтому область определения задачи с одним параметром — это некоторое множество на координатной плоскости Oxa; на рисунке 1, *а*, *б* показаны области, отвечающие соответственно областям определения, полученным в примерах 1 и 3. Возможности, связанные с такой интерпретацией, позволяют использовать графические соображения при решении задач с параметром.

Анализ условий, задающих область определения, является, как правило, обязательным при решении задачи. Однако при этом совершенно не обязательно точное ее нахождение (трудности поиска области определения, и даже описания условий, ее задающих, иногда не проще решения задачи).

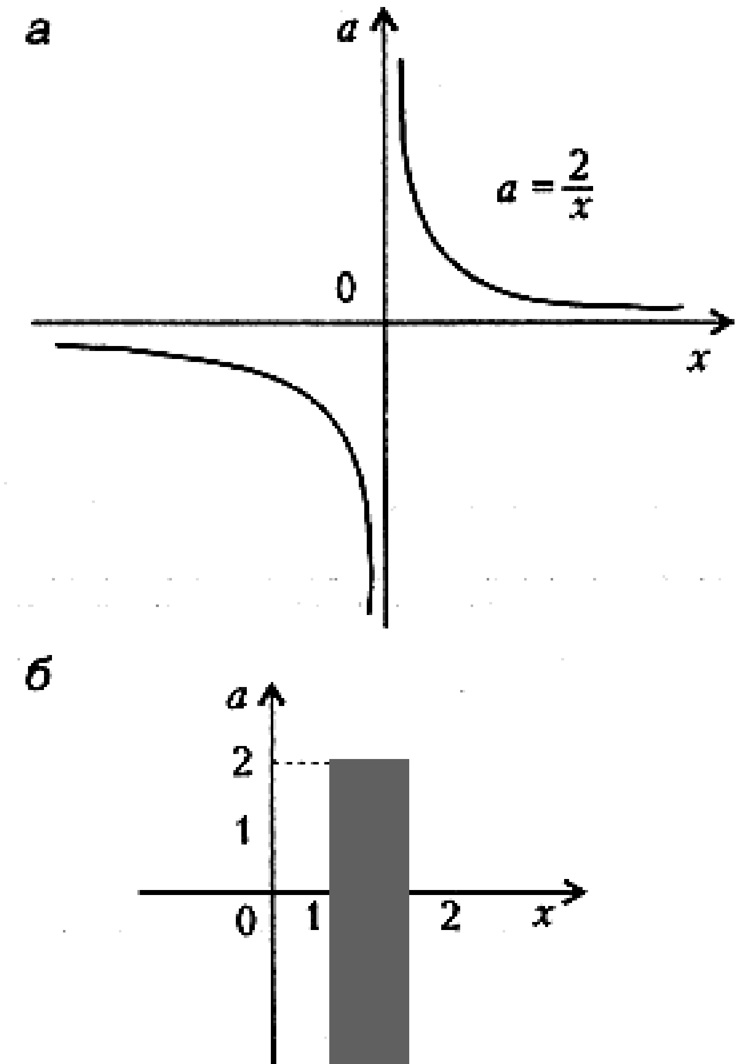

Рис. 1

Пример 4. *Найдите все такие значения a, b и c, при которых уравнение*

$$\sqrt{x+a\sqrt{x}+b}+\sqrt{x}=c$$

имеет бесконечно много решений.

Решение. Предварительный поиск области определения привел бы к довольно сложному исследованию относительно двух параметров. Поэтому мы поступим по-другому. Перенесем $\sqrt{x}$ в правую часть и возведем обе части полученного уравнения в квадрат. После приведения подобных членов получим уравнение

$$(a+2c)\sqrt{x}=c^2-b,$$

являющееся следствием данного уравнения. Это уравнение имеет больше одного решения только при $a+2c=0$ и $c^2-b=0$. Но тогда исходное уравнение принимает вид

$$\left|\sqrt{x}-c\right|=c-\sqrt{x}.$$

При $c<0$ это уравнение решений не имеет, при $c=0$ оно имеет единственное решение $x=0$, а при $c>0$ получим $0\le x\le c^2$.

Итак, данное уравнение имеет бесконечно много решений тогда и только тогда, когда $a=-2c$, $b=c^2$, $c>0$, и ему удовлетворяют все $x\in\left[0;\ c^2\right]$.

Замена переменных

Естественно, при решении задач с параметрами используются все известные методы решения алгебраических задач: замена переменной, сведение задачи к решению систем уравнений и неравенств и другие.

Пример 5. *Решите уравнение*

$$(x-a-1)(x-a-2)\times$$
$$\times(x-a-4)(x-a-5)=-2.$$

Решение. Используем так называемый метод симметризации, в основе которого (в данной задаче) лежит тот факт, что на оси абсцисс множество из четырех точек $a+1$, $a+2$, $a+4$, $a+5$ симметрично относительно точки $a+3$. Выполним замену переменных

$$y=\frac{1}{4}(x-a-1+x-a-2+x-$$
$$-a-4+x-a-5)=x-a-3,$$

в результате чего приходим к уравнению

$$(y+2)(y+1)(y-1)(y-2)=-2,$$

или

$$y^4-5y^2+6=0.$$

Поэтому данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$(x-a-3)^2=2,\ (x-a-3)^2=3,$$

из которых находим четыре корня:

$$a+3+\sqrt{2},\ a+3-\sqrt{2},\ a+3+\sqrt{3},\ a+3-\sqrt{3}.$$

Пример 6. *При каждом значении a решите неравенство*

$$x^3+\sqrt{a}x^2\le 2a\sqrt{a}.$$

Решение. Область определения задается неравенством $a\ge 0$.

При $a=0$, очевидно, имеем $x\le 0$. Чтобы решить это неравенство при $a>0$, заметим, что, разделив обе части ($a>0$) неравенства на $a\sqrt{a}=\left(\sqrt{a}\right)^3$ и положив $y=x/\sqrt{a}$, получим неравенство

$$y^3+y^2-2\le 0.$$

Так как

$$y^3+y^2-2=(y-1)\left(y^2+2y+2\right)$$

и

$$y^2+2y+2=(y+1)^2+1>0,$$

находим, что $y\le 1$.

Итак, решений нет при $a<0$,

$$x\le\sqrt{a}\ \text{при}\ a\ge 0.$$

Пример 7. *Решите уравнение*

$$\sqrt[3]{8a+x}+\sqrt[3]{8a-x}=\sqrt[3]{a}.$$

Решение. Область определеия уравнения состоит из всех действительных чисел как для x, так и для a.

Если $a=0$, то уравнению удовлетворяет любое $x\in\boldsymbol{R}$.

При $a\ne 0$, разделив обе части уравнения на $\sqrt[3]{a}$ и положив $u=\sqrt[3]{8+(x/a)}$, $v=\sqrt[3]{8-(x/a)}$, получим, что $u+v=1$. Кроме того, $u^3+v^3=16$, так что для нахождения u и v имеем систему уравнений

$$\begin{cases}u+v=1,\\ u^3+v^3=16,\end{cases}$$

решая которую (например, методом подстановки) получим для u два возможных значения:

$$u_1=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{21}\right),\ u_2=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{21}\right).$$

Таким образом, при $a\ne 0$ данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\sqrt[3]{8+(x/a)}=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{21}\right),$$

$$\sqrt[3]{8+(x/a)}=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{21}\right),$$

откуда $x=\pm 3a\sqrt{21}$.

Ответ:

если $a=0$, то $x=t$, где $t\in\boldsymbol{R}$;

если $a\ne 0$, то $x_1=3a\sqrt{21}$, $x_2=-3a\sqrt{21}$.

Равносильность

При решении неравенств с параметрами необходимо особенно тщательно следить, чтобы в ходе этих преобразований не терялись решения и не появлялись посторонние решения.

Пример 8. *Для каждого значения a решите неравенство*

$$a+\frac{4a^2}{|x-2a|}\ge 0.$$

Решение. Область определения неравенства задается соотношением $x\ne 2a$. При $a\ge 0$, очевидно, решением неравенства является любое действительное число $x\ne 2a$.

Если $a<0$, то данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}a<0,\\ 1+\dfrac{4a}{|x-2a|}\le 0,\\ x\ne 2a,\end{cases}$$

которая, так как $|x-2a|>0$ при $x\ne 2a$, в свою очередь, равносильна системе

$$\begin{cases}a<0,\\ x\ne 2a,\\ |x-2a|<-4a.\end{cases}$$

Из неравенства $|x-2a|<-4a$ находим, что $6a<x<-2a$. Таким образом,

если $a\ge 0$, то $x=t$, где t любое число и $t\ne 2a$;

если $a<0$, то $3a<x<-a$.

При решении этого неравенства, конечно, было бы очень грубой и непростительной ошибкой бездумно сократить на a без учета знака переменой a.

Следующий пример на первый взгляд не представляет ничего особенного, но при его решении надо быть предельно внимательным и осторожным.

Пример 9. *Для каждого значения a решите неравенство*

$$\frac{a-x}{a+x}\ge a. \qquad (1)$$

Решение. Приводя к общему знаменателю, получим неравенство

$$\frac{(a+1)x+a(a-1)}{a+x}\le 0,$$

которое равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases}(a+1)x+a(a-1)\ge 0,\\ a+x<0,\end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases}(a+1)x+a(a-1)\le 0,\\ a+x>0.\end{cases} \qquad (3)$$

Приведем подробное решение только системы (2); она, в свою очередь, равносильна совокупности, состоящей из трех систем:

$$\begin{cases}a+1=0,\\ a(a-1)\ge 0,\\ a+x<0,\end{cases} \qquad (2а)$$

$$\begin{cases}a+1>0,\\ x\ge -a\dfrac{a-1}{a+1},\\ x<-a,\end{cases} \qquad (2б)$$

$$\begin{cases}a+1<0,\\ x\le -a\dfrac{a-1}{a+1},\\ x<-a.\end{cases} \qquad (2в)$$

Из (2а) находим, что если $a=-1$, то система (2) имеет решение: $x<1$. Кроме того,

$$(2б)\Leftrightarrow\begin{cases}a+1>0,\\ -a>-a\dfrac{a-1}{a+1},\\ -a\dfrac{a-1}{a+1}\le x<-a.\end{cases}$$

Так как

$$-a > -a\frac{a-1}{a+1} \Leftrightarrow \frac{a}{a+1} < 0,$$

то

$$(2б) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < a < 0, \\ -a\frac{a-1}{a+1} \le x < -a \end{cases}$$

и, следовательно, для системы (2б) получаем:

если $-1 < a < 0$, то $-a\frac{a-1}{a+1} \le x < -a$;

если $a \ge 0$, то решений нет.

Для решения системы (2в) отметим, что при $a + 1 < 0$ выполняется неравенство $-a < -a\frac{a-1}{a+1}$ (см. выше). Поэтому

$$(2в) \Leftrightarrow \begin{cases} a+1 < 0, \\ x < -a \end{cases}$$

и, тем самым, для системы (2в) имеем следующий ответ:

если $a < -1$, то $x < -a$.

Объединяя полученные результаты вместе, для системы (2) получим такой ответ:

если $a \le -1$, то $x < -a$;

если $-1 < a < 0$, то $-a\frac{a-1}{a+1} \le x < -a$;

если $a \ge 0$, то решений нет.

Аналогично решается система (3); читателю предлагается провести необходимые рассуждения самостоятельно, рассмотрев соответствующие ей системы (3а), (3б), (3в). Приведем здесь полный ответ к неравенству (1):

если $a < -1$, то $x < -a$ или $x \ge -a\frac{a-1}{a+1}$;

если $a = -1$, то $x < 1$;

если $-1 < a < 0$, то $-a\frac{a-1}{a+1} \le x < a$;

если $a = 0$, то решений нет;

если $a > 0$, то $-a < x \le -a\frac{a-1}{a+1}$.

Приведенное решение основано на довольно разветвленной (хотя и простой) логической схеме, которая условно показана на рисунке 2; в ней знак ↔ означает, что решение равносильно разбору двух (аналогично, трех, четырех, ...) случаев, в логическом отношении связанных между собой союзом «или». Кроме того, отметим, что при решении задачи, по существу, был использован метод интервалов (для переменных x и a), являющийся удобным способом решения разнообразных задач.

В основе другого решения могут быть использованы графические представления (см. рис.3, на котором отмечены все области, координаты точек $(x;a)$ которых удовлетворяют неравенству (1)). Подчеркнем, однако, что обоснование этого рисунка потребует практически столько же аналитической работы, как и в приведенном решении. Отметим также, что рисунок 3, сделанный эскизно правильно и даже без необходимых обоснований, служит прекрасным инструментом (не только в этой задаче) для качественной проверки структуры полученного ответа и в поиске наиболее простой логической схемы аналитического решения.

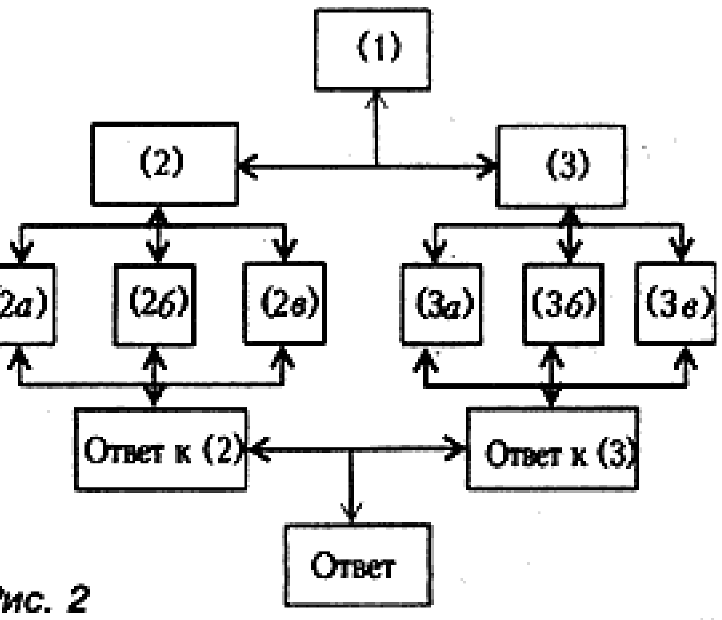

Рис. 2

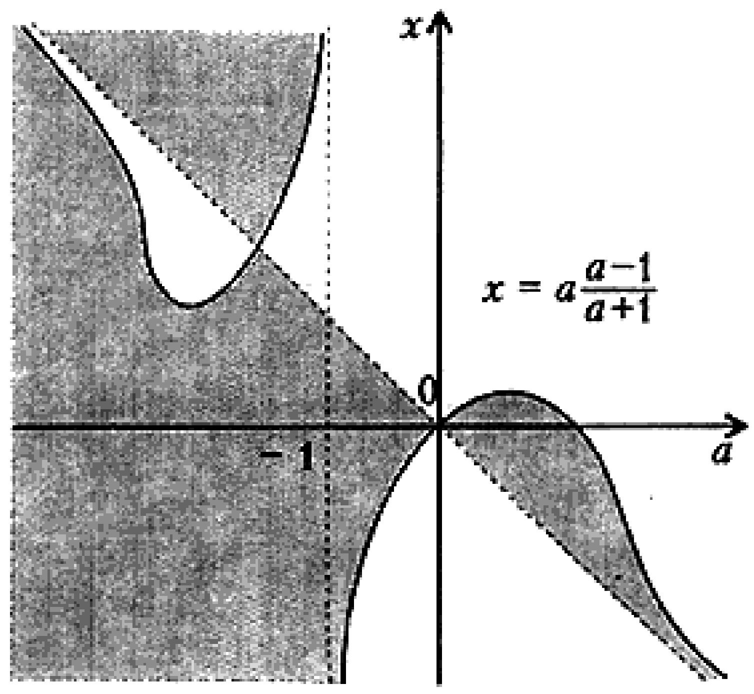

Рис. 3

Расположение корней квадратного трехчлена

Многие задачи с параметрами сводятся к исследованию квадратичной функции и изучению расположения корней квадратного трехчлена в зависимости от его коэффициентов. Эта тема представляет и самостоятельный интерес; мы ограничимся здесь только двумя примерами.

Пример 10. *Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение*

$$(3a+2)x^2 + (a-1)x + 4a + 3 = 0$$

имеет корни. Исследуйте расположение этих корней на оси абсцисс по отношению к точкам −1 и +1.

Решение. Если $3a + 2 = 0$, то уравнение принимает вид $\left(-\frac{2}{3} - 1\right)x - \frac{8}{3} + 3 = 0$ и, тем самым, имеет единственный корень $x = 1/5$.

Пусть $a \ne -\frac{2}{3}$. Тогда квадратный трехчлен $p(x) = (3a+2)x^2 + (a-1)x + 4a + 3$ имеет корни x_1 и x_2, $x_1 \le x_2$, только в том случае, когда

$$(a-1)^2 - 4(3a+2)(4a+3) \ge 0;$$

отсюда находим, что $-1 \le a < -\frac{2}{3}$ или $-\frac{2}{3} < a \le -\frac{23}{47}$.

При $a = -1$ получаем $x_1 = x_2 = -1$, а при $a = -\frac{23}{47}$ имеем $x_1 = x_2 = 7/5$.

Теперь рассмотрим отдельно два случая.

1) Пусть $-1 < a < -2/3$. Так как

$$p(1) = 3a + 2 + a - 1 + 4a + 3 = 4(2a+1)$$

и

$$p(-1) = 3a + 2 - a + 1 + 4a + 3 = 6(a+1),$$

то в рассматриваемом случае, очевидно, имеем

$$p(-1) > 0,\ p(+1) < 0.$$

Ветви параболы $y = p(x)$ направлены вниз ($2a + 3 < 0$), значение $p(-1)$ положительно, а значение $p(+1)$ отрицательно; поэтому (рис.4) при $-1 < a < -\frac{2}{3}$ имеем $x_1 < -1 < x_2 < +1$.

2) Пусть $-\frac{2}{3} < a < -\frac{23}{47}$. При таких значениях a имеем

$$p(-1) = 6(a+1) > 6\left(-\frac{2}{3} + 1\right) = 2 > 0.$$

Выясним теперь, какой знак имеет значение $p(1) = 4(2a+1)$ в рассматриваемом промежутке изменения a. Так как

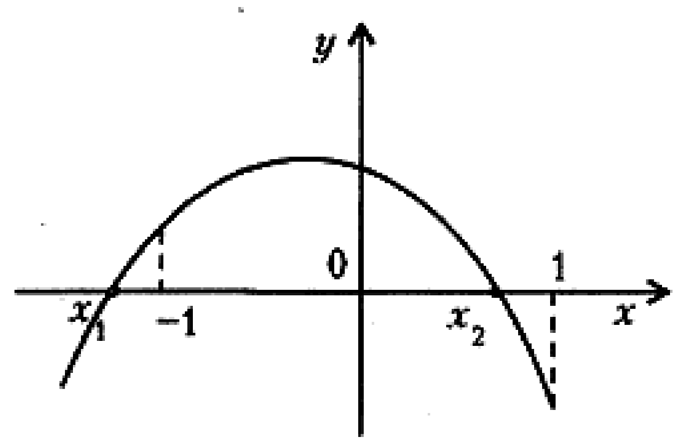

Рис. 4

$2a + 1 \ge 0$ при $a \ge -\frac{1}{2}$ и $-\frac{2}{3} < -\frac{1}{2} < -\frac{23}{47}$, то

$$p(1) < 0 \text{ при } -\frac{2}{3} < a < -\frac{1}{2}$$

и

$$p(1) > 0 \text{ при } -\frac{1}{2} < a < -\frac{23}{47}.$$

Кроме того, $p(1) = 0$ при $a = -\frac{1}{2}$; в этом случае, как легко убедиться, $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$. Таким образом (рис.5,а,б), если $-\frac{2}{3} < a < -\frac{1}{2}$, то $-1 < x_1 < 1 < x_2$; если

$-\frac{1}{2} < a < -\frac{23}{47}$, то $1 < x_1 < x_2$.

Итак, исследованы все возможные значения a, когда данное уравнение имеет корни, и в зависимости от этих значений изучено расположение этих корней на оси абсцисс. Из экономии места мы не будем здесь сводить полученные результаты в итоговый ответ.

Сделаем одно замечание. У читателя вполне могло сложиться впечатление, что в некоторых моментах обоснования решения задачи использовались графические соображения. А на вступительных экзаменах такие аргументы не всегда считаются безупречными. Подчеркнем поэтому, что ис-

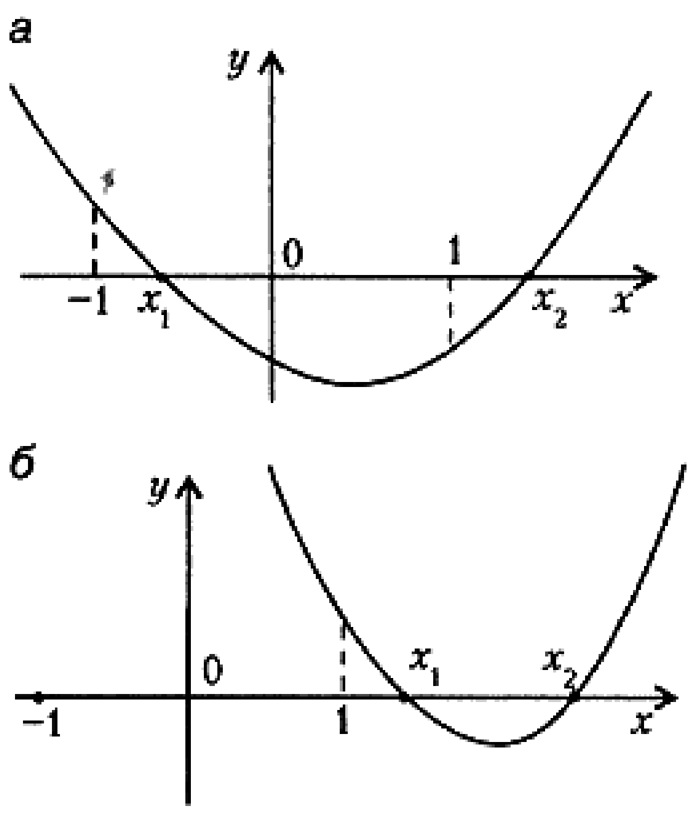

Рис. 5

пользуемые нами графики носят чисто иллюстративный характер; в действительности же в решении использовалось такое утверждение: ***квадратный трехчлен $p(x) = x^2 + px + q$ имеет ровно один корень в интервале $c < x < d$, а другой вне отрезка $[c; d]$ тогда и только тогда, когда $p(c)p(d) < 0$.***

Отметим также, что при решении этой задачи можно использовать так называемый метод сечений. Для этого заметим, что данное уравнение равносильно уравнению

$$a = f(x), \text{ где } f(x) = -\frac{2x^2 - x + 3}{3x^2 + x + 4}.$$

Проведя с необходимыми обоснованиями полное исследование (например, при помощи производной) свойств графика функции $f(x)$ и используя ее непрерывность при любом значении x, можно довести такой метод решения до конца (эскиз графика $a = f(x)$ показан на рисунке 6).

Пример 11. *Решите уравнение*

$$\sqrt{1-x^2} = \left(a - \sqrt{x}\right)^2. \qquad (1)$$

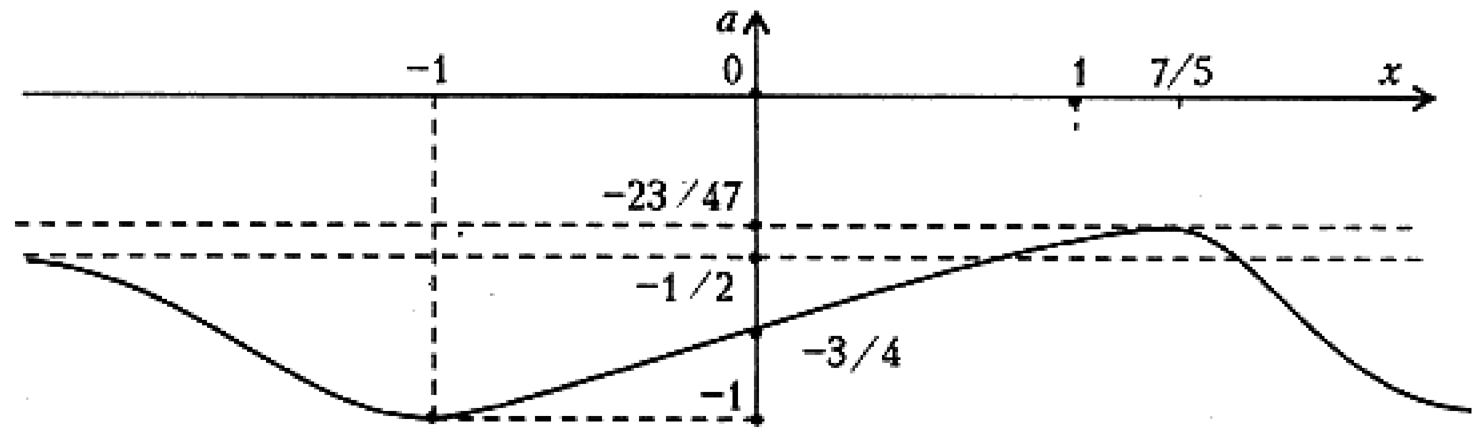

Рис. 6

Решение. Область опеделения уравнения задается двойным неравенством $0 \le x \le 1$. Сведем решение уравнения к решению системы уравнений. Для этого положим $u = \sqrt{x}$, $v = a - \sqrt{x}$; тогда $1 - x^2 = 1 - u^4$, $\left(a - \sqrt{x}\right)^2 = v^2$ и, кроме того, $0 \le u \le 1$. Для нахождения u и v, таким образом, получаем систему

$$\begin{cases} u + v = a, \\ u^4 + v^4 = 1, \\ 0 \le u \le 1. \end{cases}$$

Так как

$$u^4 + v^4 = \left(u^2 + v^2\right)^2 - 2u^2v^2 =$$

$$= \left((u+v)^2 - 2uv\right)^2 - 2(uv)^2,$$

то эта система равносильна следующей:

$$\begin{cases} u + v = a, \\ 2(uv)^2 - 4a^2(uv) + a^4 - 1 = 0, \\ 0 \le u \le 1. \end{cases} \qquad (2)$$

Квадратное уравнение $2t^2 - 4a^2t + a^4 - 1 = 0$ при любом значении a имеет два корня (возможно совпадающих):

$$t_1 = a^2 + \frac{1}{2}\sqrt{2a^4 + 2},\ t_2 = a^2 - \frac{1}{2}\sqrt{2a^4 + 2}.$$

Поэтому система (2) равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} u + v = a, \\ uv = t_1, \\ 0 \le u \le 1, \end{cases} \quad \begin{cases} u + v = a, \\ uv = t_2, \\ 0 \le u \le 1. \end{cases} \qquad (3)$$

Первая система этой совокупности решений не имеет, так как дискриминант квадратного трехчлена $z^2 - az + t_1$, корнями которого должны быть u и v, равен $a^2 - 4t_1 = -3a^2 - 2\sqrt{2a^4 + 2}$ и при любом значении a является отрицательным числом.

Переходя теперь ко второй системе совокупности (3), рассмотрим квадратный трехчлен $p(z) = z^2 - az + t_2$. Система имеет решения тогда и только тогда, когда квадратный трехчлен $p(z)$ имеет по крайней мере один корень на промежутке $0 \le z \le 1$. Уравнение имеет корни только в том случае, если

$$a^2 - 4t_2 = -3a^2 + 2\sqrt{2a^4 + 2} \ge 0.$$

Решая это неравенство, найдем, что $a^2 \le 8$, т.е. $|a| \le 2\sqrt{2}$.

Отсюда уже можно сделать вывод, что если $|a| > 2\sqrt{2}$, то уравнение (1) решений не имеет.

Уравнение

$$p(z) = z^2 - az + t_2 = 0$$

имеет по крайней мере один корень, который принадлежит промежутку $0 \le z \le 1$, только тогда, когда a удовлетворяет совокупности, состоящей из двух систем (рис.7,*а*,*б*)

$$\begin{cases} |a| \le 2\sqrt{2}, \\ p(0) \ge 0, \\ p(1) \ge 0, \\ 0 \le a/2 \le 1, \end{cases} \quad \begin{cases} |a| \le 2\sqrt{2}, \\ p(0)p(1) \le 0, \end{cases}$$

т.е. совокупности

$$\begin{cases} |a| \le 2\sqrt{2}, \\ t_2 \ge 0, \\ 1 - a + t_2 \ge 0, \\ 0 \le a/2 \le 1, \end{cases} \quad \begin{cases} |a| \le 2\sqrt{2}, \\ t_2(1 - a + t_2) \le 0. \end{cases} \qquad (4)$$

(Отметим, что условие $0 \le a/2 \le 1$ означает, что абсцисса вершины параболы $p(z)$ принадлежит отрезку $0 \le z \le 1$.) Первая из систем (4) является необходимым и достаточным условием того, что уравнение $p(z) = 0$ имеет два корня и они оба принадлежат промежутку $0 \le z \le 1$, а вторая система — необходимым и достаточным условием того, что уравнение $p(z) = 0$ имеет корни и ровно один из них принадлежит указанному промежутку.

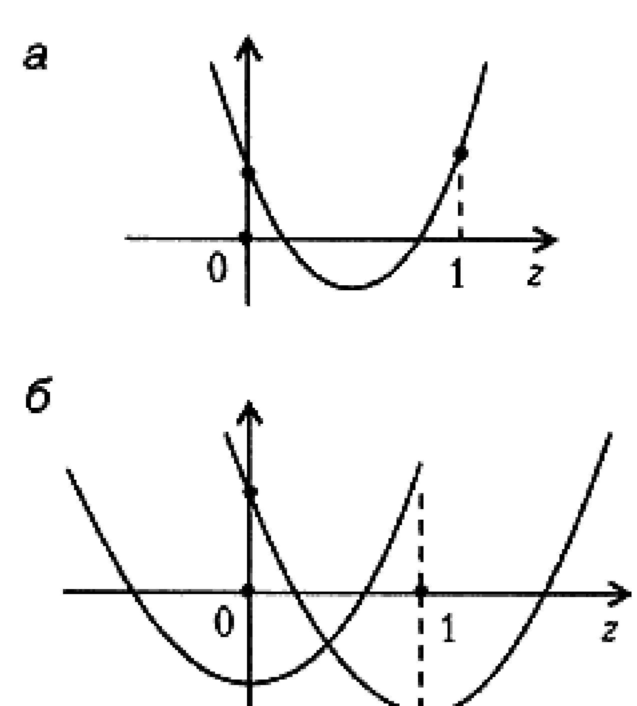

Рис. 7

Неравенство $t_2 \geq 0$, т.е. неравенство $a^2 - \frac{1}{2}\sqrt{2a^4+2} \geq 0$, дает, что $|a| \geq 1$. Тем самым, из первого, второго и четвертого условий первой системы совокупности (4) заключаем, что $1 \leq a \leq 2$. Покажем, что при таких значениях a выполняется также и неравенство $1 - a + t_2 \geq 0$. Для этого нужно показать, что

$$a^2 - a + 1 \geq \frac{1}{2}\sqrt{2a^4+2} \text{ при } 1 \leq a \leq 2. \quad (5)$$

Возводя в квадрат неравенство (5), получаем после упрощений эквивалентное неравенство $a^4 - 4a^3 + 6a^2 - 4a + 1 \geq 0$, левая часть которого равна $(a-1)^4$. Поскольку $(a-1)^4 \geq 0$ при всех a, неравенство (5) также справедливо при всех a. Отсюда следует, что решениями первой системы совокупности (4) являются все значения a такие, что $1 \leq a \leq 2$. Итак, если $1 \leq a \leq 2$, то для u получаем два значения: $u_1 = z_1$, $u_2 = z_2$, где

$$z_1 = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4t_2},$$

$$z_2 = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4t_2}$$

— корни уравнения $p(z) = 0$.

Рассмотрим вторую систему совокупности (4). Она, в свою очередь, равносильна совокупности систем

$$\begin{cases} |a| \leq 2\sqrt{2}, \\ a - 1 \geq 0, \\ 0 \leq t_2 \leq a - 1, \end{cases} \quad \begin{cases} |a| \leq 2\sqrt{2}, \\ a - 1 \leq 0, \\ a - 1 \leq t_2 \leq 0. \end{cases}$$

Из неравенства (5) следует, что $1 - a + t_2 \geq 0$; поэтому из первой системы этой совокупности находим, что $t_2 = a - 1$ и, тем самым, $a = 1$ и $t_2 = 0$, что не добавляет ничего нового по сравнению с ранее изученным.

Из первых двух неравенств второй системы находим, что $-2\sqrt{2} \leq a \leq 1$. Кроме того, так как $t_2 \leq 0$, то $|a| \leq 1$ (см. выше); следовательно, интересующая нас система равносильна следующей:

$$\begin{cases} |a| \leq 1, \\ a - 1 \leq t_2. \end{cases}$$

При этом неравенство $a - 1 \leq t_2$ справедливо. Поэтому из этой системы находим, что $|a| \leq 1$. Следовательно, если $|a| \leq 1$, то для u имеется только одно значение — неотрицательный корень уравнения $z^2 - az + t_2 = 0$, т.е. $u = z_2$ (напомним, что $t_2 \leq 0$; поэтому $z_1 z_2 \leq 0$).

Итак, объединяя полученные результаты, имеем:

если $1 < a \leq 2$, то $x = z_1^2$, $x = z_2^2$;

если $a = 1$, то $x = 0$;

если $-1 \leq a < 1$, то $x = z_2^2$;

при остальных значениях a уравнение (1) корней не имеет.

Как отмечалось выше, разнообразие задач с параметрами очень велико. Их решение требует достаточно высокой аналитической культуры и построения строгой логической конструкции их решения.

В заключение отметим старую истину: для того чтобы научиться решать задачи, нужно… их решать!