Первые международные математические соревнования Саманйолу колледжа в Турции

С 27 августа по 2 сентября 1996 года в столице Турции Анкаре проходила необычная математическая олимпиада, организатором которой стал Саманйолу колледж — одно из самых известных и престижных средних учебных заведений Турции. Устроители олимпиады решили провести математические соревнования по известному, хорошо отработанному сценарию «больших» международных олимпиад, но с участием не только национальных сборных команд, а и команд отдельных регионов и даже школ из разных — в основном исламских — стран мира.

В результате на соревнования прибыли 25 команд из 14 стран. Большая часть команд представляла бывшие республики СССР. Так, Россию, кроме сборной РФ, представляли команды Астрахани, Башкортостана, Дагестана, Татарстана, Москвы, Новосибирска, Санкт-Петербурга, Тувы, Якутии.

Участвовали в соревнованиях также команды всех бывших советских республик Средней Азии, Казахстана (2 команды), Азербайджана, Грузии, Молдовы.

По итогам соревнований из 116 участников 12 человек были награждены золотыми медалями, 18 — серебряными и 29 — бронзовыми.

Лучшие результаты российских школьников таковы: Александр Басыров и Рустем Гарифуллин из Уфы, а также Дмитрий Шкурко из Новосибирска награждены золотыми медалями, Равиль Алишев (Казань), Дарья Еттянова (Якутск), Дмитрий Прохоренко (Москва) и Григорий Спивак (Уфа) — серебряными медалями, а Борис Бадмаев, Надежда Буханцова, Александр Зевайкин, Иван Клевцов, Андрей Павликов (все — Москва), Алексей Афанасьев (Якутск) и Семен Устименко (Новосибирск) получили бронзовые медали.

В командном зачете сборной Югославии в упорной борьбе удалось занять первое место, оставив хозяев — сборную Турции — на втором. На третьем — Азербайджан, на четвертом — Казахстан. Лучшая из российских — сборная Башкортостана — оказалась на пятом месте.

Соревнования были очень хорошо и четко организованы. Культурная программа, включавшая в себя экскурсии по Анкаре и поездку в Стамбул, доставила участникам огромное удовольствие.

Особенно сильное впечатление произвела церемония закрытия олимпиады, проходившая 1 сентября в одном из лучших дворцов спорта Анкары в присутствии большого числа зрителей (по оценке на взгляд — несколько тысяч человек) и сопровождавшаяся выступлениями министров, деятелей просвещения и культуры, крупных ученых Турции, вручавших награды победителям. Выше всяких похвал были концертные номера музыкантов и певцов, прозвучавшие на церемонии.

То, что эти соревнования названы первыми, позволяет надеяться, что родилась еще она добрая традиция в международном сотрудничестве всех, кто занимается пропагандой математических знаний.

Ниже публикуются задачи, предлагавшиеся на олимпиаде. Отметим, что наиболее сложной оказалась задача 2, ее решили всего 10 человек. Остальные задачи оказались примерно одинаковыми по сложности: с каждой из них справились 30 — 35 участников.

Задачи

Первый день

1. Среди первых 1996 натуральных чисел выбрано $998+n$ $(1 \le n \le 998)$ различных произвольных чисел. Докажите, что среди выбранных всегда найдутся $2n$ чисел таких, что их сумма равна $1997n$.

2. Окружность с центром O касается сторон AB и AC (или их продолжений) треугольника ABC в точках B и P соответственно. Прямая OH перпендикулярна BC и пересекается с PB в точке K. Докажите, что AK делит отрезок BC пополам.

3. Решите уравнение

$$[x]+[2x]+[3x]+\ldots+[nx]=n^2,$$

где n — натуральное число и $[x]$ означает целую часть числа x.

Второй день

4. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ со стороной a. Две точки M и N одновременно начинают двигаться с одинаковыми скоростями по ребрам куба, причем M — по пути AB, BC, CC', а N — по пути $C'D'$, $D'A'$, $A'A$. Обозначим расстояние между A и M через x (очевидно, что $C'N=x$). Вычислите квадрат расстояния MN в терминах a и x. При каком расположении M и N расстояние между этими точками а) максимально; б) минимально?

5. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построены прямоугольники ABB_1B_2 и ACC_1C_2 соответственно, причем $AC_2=AB$ и $AB_2=AC$. Прямые BC_2 и B_2C пересекаются в точке S. Докажите, что а) угол BSC — прямой; б) точка S лежит на прямой B_1C_1.

6. Будем называть натуральное число a квадратично совершенным тогда и только тогда, когда найдутся натуральные числа a_1, a_2, .., a_k такие, что

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_k^2=a$$

и

$$\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\ldots+\frac{1}{a_k^2}=1.$$

а) Докажите, что квадратично совершенных чисел бесконечно много.

б) Докажите, что число 1996 квадратично совершенно.

Публикацию подготовили
А.Егоров, К.Йешилйурт, Ш.Цыганов