ЗАДАЧИ РОМЫ ТРАВКИНА

Несколько месяцев назад мы знали про Рому Травкина только то, что он один из победителей конкурса нашего журнала «Математика 6–8» и что он живет в Липецке. И только когда в редакцию пришел его отец, чтобы забрать причитающиеся Роме награды и грамоту, мы узнали много необычного и неожиданного. Во-первых, мы узнали, что Роме десять лет (а задачи конкурса он решал в девять). Во-вторых, что он участвует в олимпиадах для старшеклассников и выступает успешно. В-третьих, что Рома увлекается теорией чисел и проективной геометрией, с которой он познакомился по одной из статей в «Кванте». И не просто увлекается, а увлекается творчески. Не просто решает задачи из сборников, а придумывает их сам. В том, что его задачи осмысленные и интересные, вы убедитесь, познакомившись с приведенной ниже подборкой. Любопытно, что некоторые из этих задач — известные теоремы элементарной геометрии, «открытые» Ромой самостоятельно.

Ясно, что Рома — человек талантливый. Но он еще и очень мужественный и сильный человек. И это без всяких скидок на детский возраст. От Роминого папы мы узнали, что Рома с рождения поражен тяжелым недугом. Он прикован к коляске (ноги почти не действуют), плохо владеет руками, не может писать и с большим трудом говорит — его понимают только близкие люди. Все его мысли, идеи, решения задач записывает его отец, Михаил Борисович, который проводит с ним большую часть своего времени. Он же помогает Роме участвовать в олимпиадах, в присутствии представителей оргкомитета в отведенное время записывая со слов Ромы решения конкурсных задач.

Когда узнаешь о сложной судьбе и неординарном даровании Ромы Травкина, возникает естественное желание — помочь. Как? Мы не знаем. Многое зависит от самого мальчика, от его желания бороться. Он упорно работает по различным медицинским методикам, и уже наметились первые шаги, пусть пока не к выздоровлению, а хотя бы к улучшению его состояния. Одна из важных проблем — научиться эффективно работать с компьютером, может быть специализированным, чтобы иметь возможность записывать свои мысли самому, когда захочется.

Пожелаем Роме успеха и удачи в его борьбе и трудах, в том числе — математических. Если же вы захотите написать Роме, подбодрить его, поделиться своими мыслями, — напишите на адрес редакции с пометкой «Для Ромы Травкина».

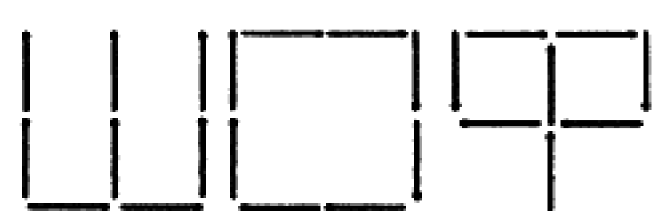
ЗАДАЧИ

1. Докажите, что для любого натурального n число $6^{n+2} + 7^{2n+1}$ делится на 43.

2. Докажите, что если $n > 5$, то хотя бы одно из чисел $n - 2$, n, $n + 2$ не является простым числом.

3 (Головоломка). Квадрат состоит из 4 маленьких квадратиков. На любой стороне маленького квадратика может лежать спичка (на общей стороне двух квадратиков может лежать только одна спичка). Любой квадратик можно повернуть на 90° вместе со спичками, лежащими на его сторонах. Требуется расположить спички в виде буквы Ш. Попытайтесь получить, вращая квадратики, конфигурации, указанные на рисунке.

4. Задана таблица $n \times n$ действительных чисел. Разрешается одновременно поменять знаки у всех чисел одной строки или одного столбца. Такая замена представляет собой одно элементарное преобразование. Некоторую таблицу можно получить из исходной после некоторого числа элементарных преобразований. Докажите, что эту же таблицу можно получить в результате не более чем n некоторых элементарных преобразований.



5. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Существует ли внутри него точка O такая, что $OA = AB$, $OB = BC$, $OC = CD$, $OD = DA$?

6. Докажите, что высоты треугольника с рациональными длинами сторон делят соответствующие стороны на отрезки рациональной длины.

7. На сторонах угла с вершиной O взяты произвольные точки A и C, а на его биссектрисе — точка B так, что $OB^2 = OA \cdot OC$. Докажите, что угол ABC не зависит от выбора точек A и C.

8. Докажите, что среди $2n$ первых натуральных чисел найдется не менее n^2 пар взаимно простых.

9. Докажите, что для любого натурального n выполняется равенство

$$(1!2!\ldots n!)(1^1 2^2 \ldots n^n) = n!^{n+1}.$$

10. Докажите, что величина, обратная радиусу вписанной в треугольник окружности, равна сумме величин, обратных высотам треугольника, и равна сумме величин, обратных радиусам вневписанных окружностей этого треугольника.

11. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что центр вписанной в треугольник $A_1B_1C_1$ окружности совпадает с ортоцентром треугольника ABC.

12. Нарисуйте график функции

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\left[\frac{x}{2^n} + \frac{1}{2}\right]^2$$

(x — действительное число, квадратными скобками обозначена целая часть).

13. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AB в точке K. Докажите, что окружности, вписанные в треугольники ACK и BCK, касаются отрезка CK в одной и той же точке.

14. Три хорды A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 некоторой окружности (или их продолжения) пересекаются в одной точке. Докажите, что если точки пересечения прямых A_1B_2 и A_2B_1 , A_2B_3 и A_3B_2, A_3B_1 и A_1B_3 существуют, то они лежат на одной прямой.

15. Точки A и B называются сопряженными относительно окружности S, если существуют точки K_1, L_1, K_2, L_2, лежащие на окружности S, такие, что A есть точка пересечения прямых K_1K_2 и L_1L_2, а B есть точка пересечения прямых K_1L_2 и L_1K_2. (В случае совпадения некоторых двух из точек K_1, L_1, K_2, L_2 считаем, что прямая, проведенная через них, есть касательная к окружности.)

а) Докажите, что геометрическое место точек, сопряженных с некоторой заданной точкой A относительно S, есть некоторая прямая l_A.

б) Обозначим через O центр окружности S. Докажите, что точка B пересечения прямых l_A и AO получается путем преобразования инверсии из точки A относительно окружности S.

в) Докажите, что S есть окружность Апполония по отношению к отрезку AB.

г) Выведите из а) принцип двойственности точек и прямых в проективной геометрии.

16. Дан четырехугольник $KLMN$. Прямые KL и MN пересекаются в точке A, прямые KN и LM — в точке B, прямые KM и LN — в точке C. Прямые AC и LM пересекаются в точке P, а прямые BC и MN — в точке Q. Докажите, что прямые LN, PQ и AB пересекаются в одной точке или параллельны.

17. Точки A, B, C попарно сопряжены (см. задачу 15) относительно окружности S с центром O. Докажите, что O есть ортоцентр треугольника ABC.

18. Дан четырехугольник $ABCD$. Прямые AB и CD пересекаются в точке P, а диагонали четырехугольника — в точке Q. Прямая PQ пересекает стороны AD и BC, соответственно, в точках K и L. Обозначим через R точку пересечения диагоналей четырехугольника $KLCD$, а через M и N — соответственно, точки пересечения прямой PR с прямыми AD и BC. Докажите, что

$$\frac{AM}{MD} = 3\frac{AK}{KD}.$$

20. Докажите, что наименьшее общее кратное натуральных чисел, не превосходящих n, не превосходит $N^{\pi(n)}$, где $\pi(n)$ — количество простых чисел, не превосходящих n.