На часок к семейке репьюнитов

Б.КОРДЕМСКИЙ

Среди авторов научно-популярных и учебных книг по математике для юношества не так много имен, хорошо знакомых нескольким поколениям людей. Из них имя Бориса Анастасьевича Кордемского — одно из самых известных. Если ваши родители, будучи школьниками, хоть немного увлекались математикой — спросите их, кто этот человек. И вы обязательно услышите в ответ: «Как же, как же, это автор «Математической смекалки». Чудесная, между прочим, была книга!».

Но эта книга не только была, она и есть. Появившись впервые в 1954 году, «Математическая смекалка» постоянно совершенствовалась, выходила снова и снова с завидной периодичностью (три года назад вышло ее 10-е издание) и неизменно привлекала интерес молодежи. Как, впрочем, и многие другие книги этого автора. Продолжая замечательные традиции нашей педагогики, Б.А.Кордемский внес существенный вклад в золотой фонд российской литературы для школьников по занимательной математике.

Патриарху среди популяризаторов математики исполнилось 90 лет. Редколлегия журнала «Квант», сама воспитанная на его книгах и восхищенная его талантом, искреннее желает Борису Анастасьевичу доброго здоровья и новых изданий — для молодой поросли любителей математики.

Предлагаем вниманию читателей небольшой отрывок из готовящейся к печати новой книги замечательного математического сказочника.

СЕМЕЙКА репьюнитов $R(b, n)$ — это натуральные числа, запись которых в любой системе счисления с основанием $b > 1$ состоит только из единиц. Репьюниты в десятичной системе обозначаются короче, R_n: $R_1 = 1$, $R_2 = 11$, $R_3 = 111$, $R_4 = 1111, \ldots$

«Фамилия» этого семейства — *Repunit* — образована слиянием двух английских слов: *«repeated unit»* (повторенная единица).

Обнаружено немало интересных свойств репьюнитов, но также немало и не разгаданных еще. Например, в семействе репьюнитов (R_n) выявлено пока только 5 простых чисел: R_2, R_{19}, R_{23}, R_{317} и R_{1037}.

Живописна табличка простых делителей начальной последовательности составных репьюнитов:

$$111 = 3\cdot 37,$$
$$1111 = 11\cdot 101,$$
$$11\,111 = 41\cdot 271,$$
$$111\,111 = 3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37,$$
$$1\,111\,111 = 239\cdot 4649,$$
$$11\,111\,111 = 11\cdot 73\cdot 101\cdot 137,$$
$$111\,111\,111 = 3\cdot 37\cdot 333667.$$

В результате умножения $R_i\cdot R_j$ при $9\ge i\ge j$ получается палиндромическое число вида $(12\ldots j\ldots 21)$ из $i+j-1$ цифр с цифрой j посредине. (*Палиндромом* называется натуральное число, запись которого совпадает с записью своего зеркального отражения.)

Примеры:

$$\begin{array}{r} \times\ \begin{array}{r}11111\\111\end{array} \\ \hline 1233321 \end{array} \qquad 111^2 = 12\,321.$$

Если $i\ge j>9$, то $R_i\cdot R_j$ — не палиндром.

Задачи (из «семейной хроники» репьюнитов):

1. Какими цифрами следует заменить буквы, чтобы сумма девяти слагаемых стала равной репьюниту?

$$\begin{array}{r} \text{РЕПЬЮНИТ}\\ \text{РЕПЬЮНИТ}\\ \text{РЕПЬЮНИТ}\\ \text{РЕПЬЮНИТ}\\ +\ \text{РЕПЬЮНИТ}\\ \text{РЕПЬЮНИТ}\\ \text{РЕПЬЮНИТ}\\ \text{РЕПЬЮНИТ}\\ \underline{\text{РЕПЬЮНИТ}} \end{array}$$

2. Произведением каких двух репьюнитов является число

$$123455554321?$$

3. В прошлом месяце сумма, вырученная фирмой от продажи партии новых мини-автомобилей, составила 1111111 долларов. Если каждый автомобиль имел одну и ту же цену, то сколько их было продано?

4. Какие цифры заменены буквами в десятичной записи произведения?

$$\begin{array}{c} \text{RRRRRRR}\\ \underline{\text{RRRRRRR}}\\ \text{REPUNITINUPER} \end{array}$$

5. Дайте рекуррентное определение репьюнита.

6. Являются ли взаимно простыми два репьюнита, номера (n) которых а) последовательные числа, б) последовательные нечетные числа, в) последовательные четные числа?

7. Какие репьюниты в системе счисления с четным основанием будут нечетными, а в системе счисления с нечетным основанием будут четными?

8. Когда к цифре 2 прижимаются n единиц слева и n единиц справа, то образуется палиндромическое число

$$\underbrace{11\ldots 1}_{n\ \text{единиц}}2\underbrace{1\ldots 11}_{n\ \text{единиц}}$$

— репьюнит с проникшей в его сердцевину двойкой. Докажите, что при всяком значении n это число — не простое. Так, в частности, при $n=1$ имеем

$$121 = 11\cdot 11,$$

при $n=2$ имеем

$$11211 = 111\cdot 101.$$