ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Принцип суперпозиции и напряженности электрического поля

Д.АЛЕКСАНДРОВ

Напряженность поля, создаваемого неподвижным точечным зарядом, можно найти из закона Кулона. Получается

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}, \quad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Для неточечного заряженного тела задача нахождения напряженности поля сложнее. Один из методов ее решения состоит в разбиении на точечные заряды и применении принципа суперпозиции, согласно которому поле нескольких зарядов равно векторной сумме полей каждого их них. В принципе, этот метод универсален. Он позволяет найти поле в любой ситуации, если известно расположение создающих его зарядов. Единственная проблема – вычислить получающуюся сумму. Разберем несколько практически важных примеров, когда это удается сделать сравнительно просто.

Начнем с совсем простого примера – найдем поле равномерно заряженного кольца на его оси (рис.1).

Разобьем кольцо на маленькие кусочки и найдем поля i-го кусочка в интересующей нас точке:

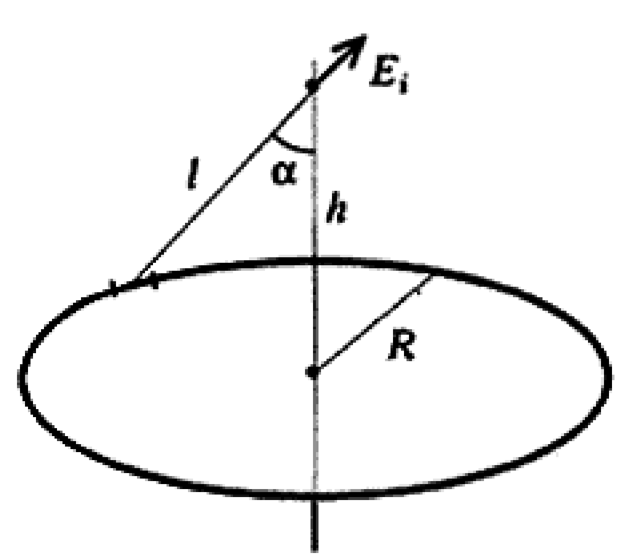

Рис. 1

$$E_i = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 l^2}.$$

Поле всего кольца равно

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i.$$

Модуль вектора $\vec{E}$, конечно, не равен сумме модулей отдельных слагаемых, поэтому сначала учтем симметрию задачи и избавимся от векторности суммы. Понятно, что перпендикулярные оси составляющие поля при суммировании сократятся, а параллельные просто сложатся и для модуля результирующего поля можно записать

$$E = \sum E_{i\parallel} = \sum \frac{q_i \cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 l^2}.$$

В любой сумме одинаковые для всех слагаемых множители можно выносить за скобки. В нашем случае l и α одинаковы для всех кусочков. Заряды q_i зависят от того, как мы разрезали кольцо, и в принципе могут быть произвольными (но достаточно малыми). Индекс «i», таким образом, не только нумерует кусочки, но и подсказывает нам, что эту величину нельзя вынести за знак суммы. В результате суммирования получим

$$E = \frac{\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 l^2}\sum q_i = \frac{Q\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 l^2} = \frac{Qh}{4\pi\varepsilon_0\left(h^2+R^2\right)^{3/2}},$$

где Q — полный заряд кольца. В центре кольца поле равно нулю, а при $h \gg R$ переходит, как и следовало ожидать, в поле точечного заряда.

Как видно, в данном случае сумма выродилась в тривиальное сложение зарядов отдельных кусочков. Если, однако, зарядить кольцо неравномерно или сдвинуть в сторону точку наблюдения, задача станет несравненно сложнее.

Теперь перейдем к полю бесконечной равномерно заряженной нити (рис.2).

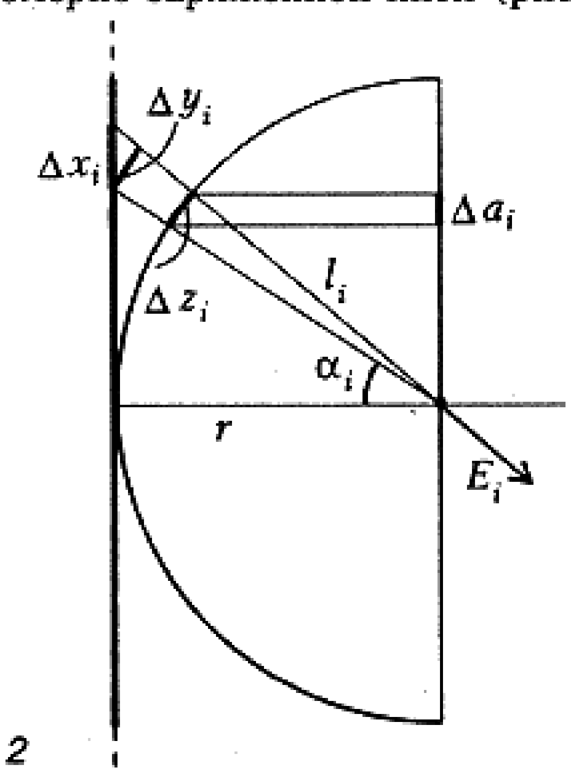

Рис. 2

Обозначим линейную плотность заряда нити через λ, а расстояние от точки наблюдения до нити — через r. Разобьем нить на маленькие кусочки и запишем принцип суперпозиции:

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i ,$$

где

$$E_i = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 l_i^2}, \quad q_i = \lambda \Delta x_i, \quad l_i^2 = r^2 + x_i^2 .$$

В этом случае при суммировании сократятся параллельные нити составляющие поля, и для модуля результирующего поля получим

$$E = \sum E_{i\perp} = \sum E_i \cos\alpha_i = \sum \frac{\lambda \Delta x_i}{4\pi\varepsilon_0 l_i^2} \cos\alpha_i .$$

Такая сумма пугает обилием индексов «i», и за знак суммы можно вынести только λ. Однако расчет можно упростить, придав геометрический смысл оставшемуся выражению. Для этого проведем касающуюся нити окружность с центром в точке наблюдения. Тогда $\Delta y_i = \Delta x_i \cos\alpha_i$ (обозначения ясны из рисунка 2), $\Delta z_i = \Delta y_i r / l_i$, $r/l_i = \cos\alpha_i$ и

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \sum \frac{r \Delta y_i}{l_i} \frac{r}{l_i} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \sum \Delta z_i \cos\alpha_i = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \sum \Delta a_i = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r^2} 2r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} .$$

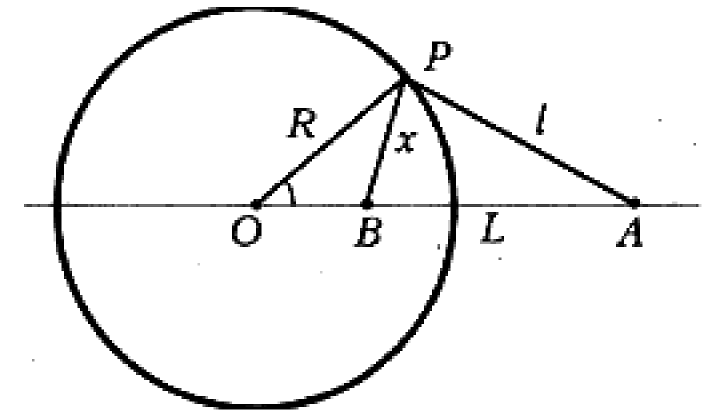

Рис. 3

Аналогично можно справиться с суммой, возникающей при вычислении поля равномерно заряженной плоскости.

Разрежем плоскость на тонкие параллельные полоски. Поле такой полоски мы только что вычислили. Если поверхностная плотнсть заряда на плоскости σ, а ширина полоски Δx, то заряд единицы длины полоски равен $\lambda = \sigma \Delta x$ и поле, создаваемое i-й полоской в точке наблюдения, равно

$$E_i = \frac{\sigma \Delta x_i}{2\pi\varepsilon_0 l_i} .$$

Согласно принципу суперпозиции (обозначения см. на рисунке 2),

$$E = \sum E_i \cos\alpha_i = \sum \frac{\sigma \Delta x_i \cos\alpha_i}{2\pi\varepsilon_0 l_i} .$$

Поскольку (аналогично предыдущему) $\Delta y_i = \Delta x_i \cos\alpha_i$ и $\Delta z_i = \Delta y_i r / l_i$, получаем

$$E = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0} \sum \frac{\Delta x_i \cos\alpha_i}{l_i} = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0} \sum \frac{\Delta y_i}{l_i} = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0 r} \sum \frac{\Delta y_i r}{l_i} = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0 r} \sum \Delta z = \frac{\sigma \pi r}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} .$$

Упражнения

1. Найдите поле плоскости, разбивая ее не на полоски, а на кольца и используя результат задачи о поле кольца.

2. Найдите поле плоскости, разбивая ее на точечные заряды (вместо полуокружности придется взять полусферу).

Чтобы справится с задачей нахождения поля заряженной сферы, понадобится немного геометрии.

Рассмотрим окружность с центром O и радиусом R и какую-нибудь точку A вне ее (рис.3). Точку B на луче OA, для которой $OA \cdot OB = R^2$, назовем сопряжённой с точкой A. Она обладает многими замечательными свойствами. Для нас важно следующее: $OB/OP = OP/OA$. Треугольники POB и POA, кроме пропорциональных сторон, имеют еще общий угол, поэтому они подобны. Обозначив $OA = L$, $BP = x$, $PA = l$ и $OP = R$, имеем $R/L = x/l$. Из подобия

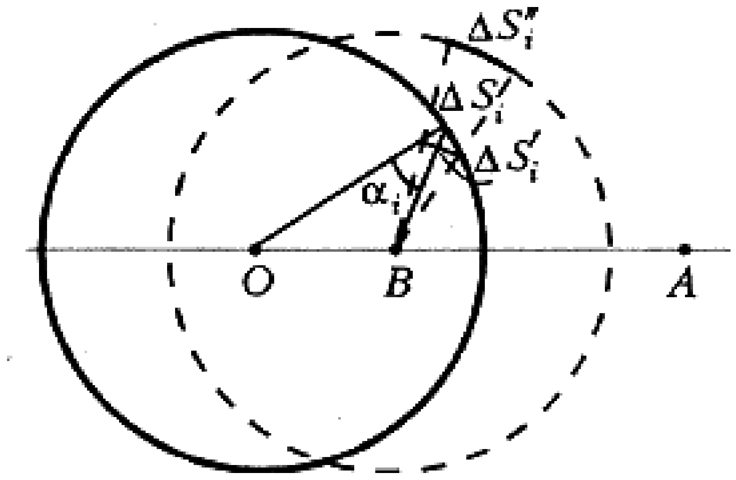

Рис. 4

также следует, что

$$\angle OPB = \angle PAO .$$

Теперь займемся собственно полем сферы. Если A — точка наблюдения, а σ — плотность заряда на сфере, то в обозначениях на рисунках 3 и 4 имеем

$$E = \sum \frac{\sigma \Delta S_i}{4\pi\varepsilon_0 l_i^2} \cos\alpha_i .$$

Построим сферу того же радиуса с центром в точке B, сопряженной с A, и найдем площадь $\Delta S_i''$, которую закрывает на ней площадка ΔS_i, если смотреть из точки B:

$$\Delta S_i'' = \left(\frac{R}{x}\right)^2 \Delta S_i' = \frac{R^2 \Delta S_i \cos\alpha_i}{x^2} .$$

Вспомнив, что $x/R = l/L$, получим

$$\Delta S_i'' = \frac{\Delta S_i \cos\alpha_i}{l_i^2} L^2$$

и найдем нужную нам сумму:

$$E = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} \sum \frac{\Delta S_i \cos\alpha_i}{l_i^2} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0 L^2} \sum \Delta S_i'' = \frac{\sigma \cdot 4\pi R^2}{4\pi\varepsilon_0 L^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L^2} .$$

Упражнение 3. Покажите, что внутри сферы поля нет.