AC (рис. 12). Второй случай, когда P лежит на продолжении стороны AC, рассматривается аналогично.

Через точку K проведем прямую LM, параллельную BC, так, что точка L лежит на AC, а M — на AB. Получающиеся четырехугольники $OLPK$ и $OKMB$ — вписанные. Действительно, у первого из них есть прямые углы OKL и OPL, а у второго — прямые углы OKM и OBM.

Из того, что $OLPK$ — вписанный, получаем равенство углов OLK и OPK; а из четырехугольника $OKMB$ — равенство $\angle OMK = \angle OBK$. Кроме того, треугольник OBP — равнобедренный, откуда $\angle OPK = \angle OBK$.

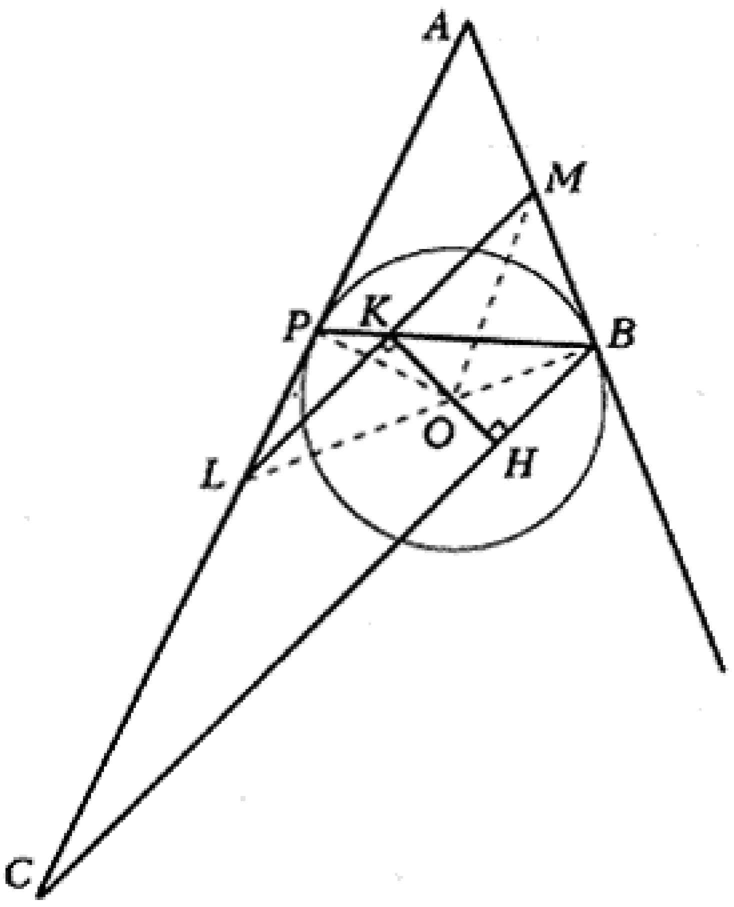

Рис. 12

Запишем цепочку равенств

$$\angle OLK = \angle OPK = \angle OBK = \angle OMK,$$

из которой следует, что треугольник OLM — равнобедренный. Следовательно, перпендикуляр OK делит сторону LM пополам и для треугольника ALM прямая AK является медианой. В силу подобия треугольников ALM и ACB получаем, что AK является медианой для ACB и делит CB пополам.

3. $x \in \left[2-\frac{1}{n}; 2\right)$. *Указание.* Рассмотрите 5 случаев: $x \le 0$; $0 < x < 1$; $1 \le x < 2-\frac{1}{n}$; $2-\frac{1}{n} \le x < 2$; $x \ge 2$.

4. Максимум расстояния MN достигается, когда эти точки расположены в вершинах квадрата, минимум — когда они на серединах ребер. *Указание.* Воспользуйтесь методом координат.

5. а) Треугольники AB_2C и ABC_2 — равнобедренные (рис.13) по условию задачи, и у них равны углы при вершине A. Следовательно, эти треугольники подобны. Совершим поворот относительно точки A на 90° так, чтобы прямая AC_2 перешла в прямую AC, а прямая AB — в прямую AB_2. При этом образ прямой C_2B окажется параллельным прямой CB_2. Следовательно, прямые C_2B и CB_2 были перпендикулярны.

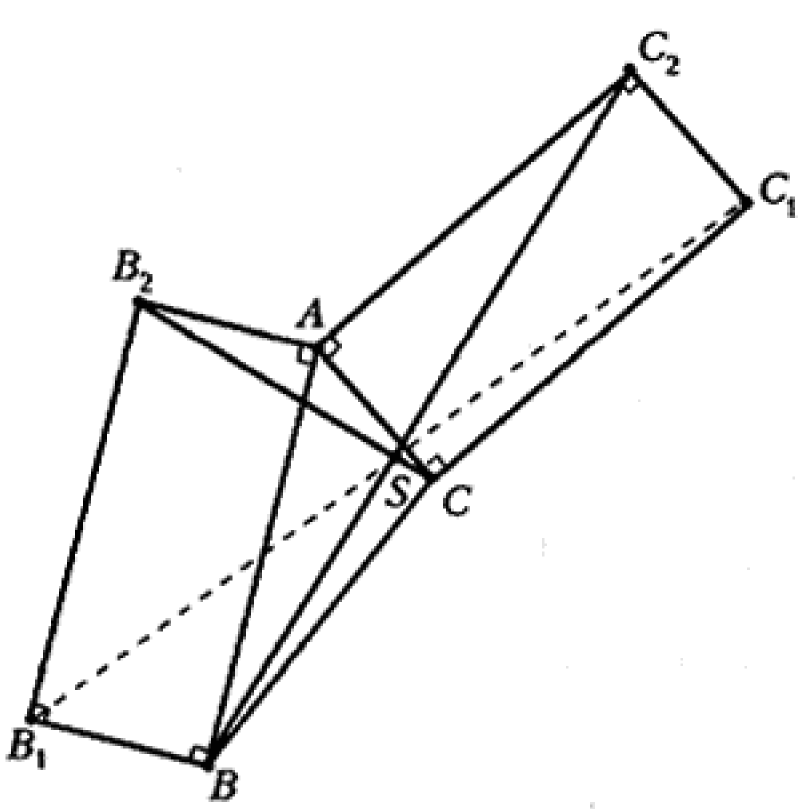

Рис. 13

б) Углы B_2SB и B_2B_1B — прямые, поэтому точки B_2, S, B, B_1 лежат на одной окружности и $\angle B_1SB = \angle B_1B_2B$. Аналогично, точки S, C_2, C_1, C также лежат на одной окружности и $\angle C_1SC_2 = \angle C_1CC_2$. Прямоугольники ABB_1B_2 и ACC_1C_2 одинаковы, поэтому $\angle B_1B_2B = \angle C_1CC_2$. Выписав вместе все полученные равенства

$$\angle B_1SB = \angle B_1B_2B = \angle C_1CC_2 = \angle C_1SC_2,$$

по теореме о вертикальных углах получаем, что точка S лежит на прямой B_1C_1.

6. а) Все числа вида n^4, $n \in \mathbf{N}$ являются квадратично совершенными.

б) Легко убедиться, что

$$\underbrace{8^2+8^2+\ldots+8^2}_{16\text{ раз}}+\underbrace{6^2+6^2+\ldots+6^2}_{27\text{ раз}} = 16\times 64+27\times 36 = 1024+972 = 1996,$$

$$\underbrace{\frac{1}{8^2}+\frac{1}{8^2}+\ldots+\frac{1}{8^2}}_{16\text{ раз}}+\underbrace{\frac{1}{6^2}+\frac{1}{6^2}+\ldots+\frac{1}{6^2}}_{27\text{ раз}} = \frac{16}{64}+\frac{27}{36} = \frac{1}{4}+\frac{3}{4} = 1.$$

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

А.Н.Балдин, В.Н.Власов, В.А.Иванюк, А.Е.Пацхверия, М.М.Константинова, Д.Н.Гришукова, П.И.Чернуский, С.Б.Шехов

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Осипова

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати
142300 г.Чехов Московской области
Заказ № 1352