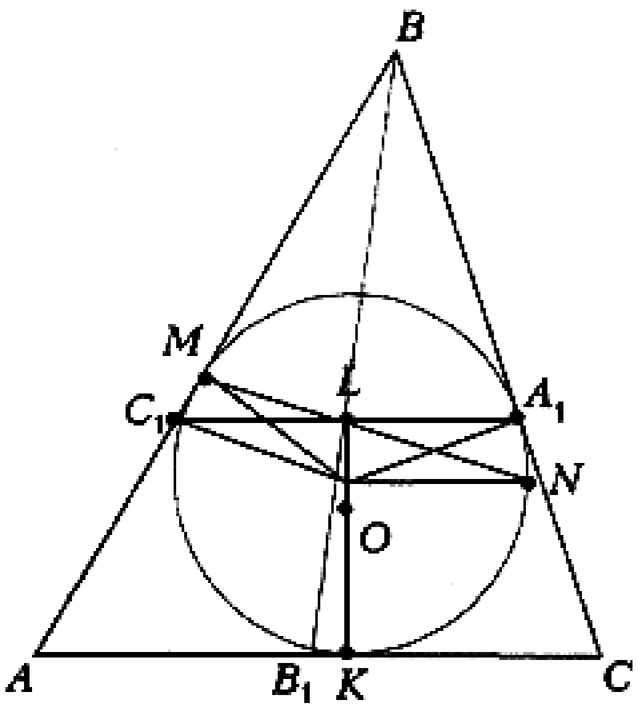

Рис. 7

— равнобедренный, и его высота OK является и медианой. Итак, $A_1L = LC_1$. Но тогда точка L, очевидно, лежит на медиане BB_1, т.е. L совпадает с D из условия задачи.

7. *Ответ*: $m = n = l = 2$. Положим d = НОД(m, n, l). Пусть $m = dm_1$, $n = dn_1$, $l = dl_1$. Тогда $d(m_1+n_1) = d^2d_{mn}^2$, где d_{mn} = НОД(m_1,n_1); отсюда $m_1 + n_1 = d\cdot d_{mn}^2$. Складывая это равенство с двумя аналогичными, получаем:

$$2(m_1+n_1+l_1)=d\cdot d\left(d_{mn}^2+d_{ml}^2+d_{nl}^2\right). \qquad (*)$$

Покажем, что d взаимно просто с суммой $m_1 + n_1 + l_1$. В самом деле, если у d и этой суммы есть общий делитель $d_1 > 1$, то он будет общим делителем всех чисел m_1, n_1 и l_1 (так как сумма любых двух из них делится на d). Но тогда произведение $d\cdot d_1$ — общий делитель чисел m, n и l, что противоречит определению числа d. Следовательно, d является делителем числа 2 (равенство (*)), откуда $d\le 2$. Заметим, что числа d_{mn}, d_{nl}, d_{ml} попарно взаимно просты (иначе у чисел m_1, n_1, l_1 нашелся бы общий делитель, не равный 1). Поэтому $m_1 = d_{mn}\cdot d_{ml}\cdot m_2$, $n_1 = d_{mn}\cdot d_{nl}\cdot n_2$, $l_1 = d_{nl}\cdot d_{ml}\cdot l_2$, где m_2, n_2, l_2 — натуральные числа. В таких обозначениях первое из исходных уравнений приобретает такой вид

$$d_{mn}\cdot d_{ml}\cdot m_2 + d_{mn}\cdot d_{nl}\cdot n_2 = d\cdot d_{mn}^2,$$

т.е.

$$d_{ml}\cdot m_2 + d_{nl}\cdot n_2 = d\cdot d_{mn}.$$

Не умаляя общности, мы можем считать, что число d_{mn} — наименьшее из чисел d_{mn}, d_{ml} и d_{nl}. Имеем

$$d_{ml}\cdot m_2 + d_{nl}\cdot n_2 \ge d_{ml} + d_{nl} \ge 2d_{mn} \ge d\cdot d_{mn}$$

(так как $d\le 2$). Итак, все неравенства являются на самом деле равенствами, отсюда $m_2 = n_2 = 1$, $d = 2$ и $d_{ml} = d_{mn} = d_{nl}$. Но числа d_{mn}, d_{ml}, d_{nl} попарно взаимно просты, следовательно, они равны 1, и мы нашли единственное решение $m = n = l = 2$.

11 класс

4. Пусть PQ — любое горизонтальное ребро одного из кубиков. Обозначим через C_{PQ} вертикально расположенный прямоугольник, нижняя сторона которого — PQ, а верхняя лежит на поверхности куба. Пусть n_{PQ} — число пересечений данной ломаной с прямоугольником C_{PQ}. Ребро PQ покрасим в белый цвет, если n_{PQ} — четно, в черный, если n_{PQ} — нечетно. Все остальные, т.е. вертикальные, ребра кубиков покрасим в белый цвет. Докажем теперь, что приведенная раскраска удовлетворяет условию задачи. Пусть $PQRS$ — вертикальная грань и PQ и RS — ее горизонтальные ребра. Если ломаная не пересекает $PQRS$, то прямоугольники C_{PQ} и C_{RS} пересекаются с ломаной в одних и тех же точках. Поэтому ребра PQ и RS покрашены в один цвет и, следовательно, эта грань удовлетворяет требованию задачи. Если же ломаная пересекает прямоугольник $PQRS$, то n_{PQ} и n_{RS} отличаются на 1 и, следовательно, имеют разную четность. Поэтому ребра PQ и RS покрашены в разные цвета, что означает выполнение условия задачи и в этом случае.

Пусть теперь $PQRS$ — горизотальная грань. Объединение прямоугольников C_{PQ}, C_{QR}, C_{RS} и C_{SP} есть боковая поверхность параллелепипеда, состоящего из кубиков, расположенных в точности над гранью $PQRS$. Замкнутая ломаная пересекает поверхность параллелепипеда четное число раз (сколько раз ломаная «заходит» внутрь параллелепипеда, столько раз она и «выходит» из него).

Заметим, что ломаная не пересекает верхнюю грань параллелепипеда. Если грань $PQRS$ не отмечена, то ломаная не пересекает ее. Тогда все точки пересечения ломаной с поверхностью параллелепипеда расположены на его боковой поверхности. В этом случае сумма $n_{PQ} + n_{QR} + n_{RS} + n_{SP}$ четна. Если же грань $PQRS$ отмечена, то одна из точек пересечения ломаной с поверхностью параллелепипеда принадлежит $PQRS$. Тогда сумма $n_{PQ} + n_{QR} + n_{RS} + n_{SP}$ нечетна, и следовательно, нечетное число сторон грани $PQRS$ окрашено в черный цвет.

5. Пусть $m\le n$ — целые корни уравнения $x^2 + ax + b = 0$. Тогда из $m + n = -a$, $mn = b$ следует, что m, $n < 0$, $1\le|n|\le|m|\le 1997$, $0 < mn \le 1997$. Рассмотрим уравнение $x^2 - nx + mn = 0$. Его коэффициенты — целые числа от 1 до 1997, и оно не имеет корней, так как $D = n^2 - 4mn = n(n - 4m) < 0$.

Итак, среди рассматриваемых уравнений любому уравнению с целыми корнями можно поставить в соответствие единственное уравнение, не имеющее корней. Кроме того, все квадратные трехчлены $x^2 + cx + d$, где c — четно, d — нечетно, $D < 0$, не представимы в виде $x^2 - nx + mn$. Значит, уравнений, не имеющих корней, больше.

6. Для каждой из вершин многоугольника, лежащих по одну сторону от l, отметим отрезок, высекаемый на l продолжениями выходящих из нее сторон. Тогда условие задачи означает, что точка P лежит внутри многоугольника тогда и только тогда, когда она принадлежит нечетному числу отмеченных отрезков. Но каждая из точек пересечения l со сторонами многоугольника будет концом ровно одного из отмеченных отрезков, а каждая из точек пересечения l с продолжением стороны многоугольника — концом ровно двух отмеченных отрезков.

Следовательно, при движении точки P по прямой l четность количества содержащих ее отмеченных отрезков изменяется при каждом пересечении границы многоугольника. Отсюда и следует утверждение задачи.

7. Пусть O — центр сферы, O_1 — точка пересечения биссектрис ΔABC, H — ортоцентр ΔACD, M — точка пересечения медиан ΔABD и O_1, H, M — точки касания (рис.8).

Точка O_1 — центр окружности, вписанной в ΔABC. Пусть эта окружность касается сторон BC, CA и AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Тогда $O_1A_1 = O_1B_1 = O_1C_1$, следовательно, прямоугольные треугольники OO_1A_1, OO_1B_1, OO_1C_1 равны, откуда $\angle OA_1O_1 + \angle OB_1O_1 + \angle OC_1O_1 = \varphi$. Кроме того, $O_1A_1\perp BC$, поэтому по теореме о трех перпендикулярах $OA_1\perp BC$, т.е. φ — линейный угол двугранного угла с гранями BOC и BO_1C. С другой стороны, BOC — биссектор двугранного угла с гранями BDC и BAC (O — центр вписанной сферы), поэтому угол межу гранями BDC и ABC равен 2φ. Аналогично, грани ADC и ADB наклонены к основанию