из этих прямоугольников четна, а это противоречит нечетности высоты столбца S.

Итак, все способы оклейки можно разбить на пары переходящих друг в руга оклеек (при симметрии относительно указанной плоскости), значит, их число четно.

5. *Ответ*: нет. *Указание*. Если оба уравнения имеют целые корни, то числа b и c не могут быть оба нечетными, а числа $c + 1$ и $b + 1$ обязаны быть четными.

6. Объединим учеников в группы по фамилиям и в группы по именам (возможны группы, состоящие из одного человека — например, ученик без однофамильцев). Каждый войдет в две группы — по фамилии и по имени. Из условия задачи следует, что в классе ровно одиннадцать групп. Действительно, есть группы, состоящие из 1, 2, ..., 11 человек, поэтому групп не меньше одиннадцати, но $1 + 2 + ... + 11 = 66 = 2 \cdot 33$, т.е. мы уже сосчитали каждого ученика дважды, значит, больше групп нет.

Рассмотрим группу из одиннадцати человек (скажем, однофамильцев). Остальных групп, и в частности групп тезок, не более десяти. Потому какие-то двое из одиннадцати входят в одну группу тезок, т.е. у них одинаковы и имя, и фамилия.

7. Пусть прямые AD и AE пересекают прямую BC в точках F и H соответственно (рис.6). Достаточно доказать, что DE — средняя линия треугольника AFH. Треугольник MBN равно-

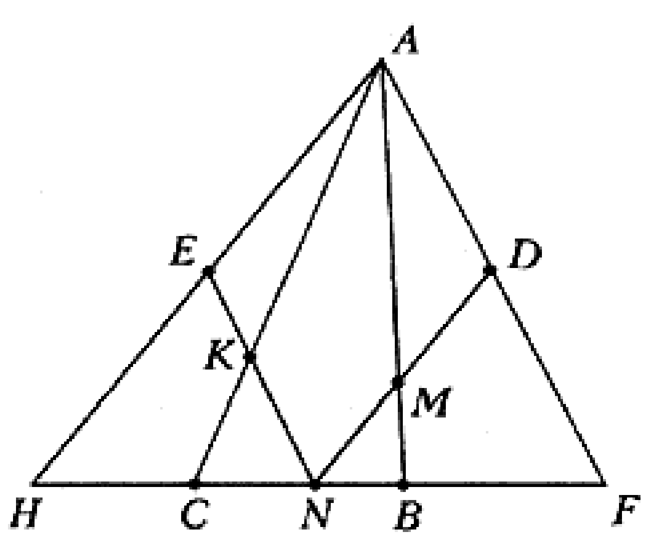

Рис. 6

бедренный ($BM = BN$) и $MN \| AH$, поэтому $AMNH$ — равнобедренная трапеция, т.е. $NH = AM$. Аналогично доказывается, что $FN = AK$. Так как $AK = AM$, то из полученных равенств следует, что $FN = NH$, т.е. N — середина FH. Тогда D — середина AF, а E — середина AH.

10 КЛАСС

1. *Ответ*: $(\pm1;0)$, $(\pm4;3)$, $(\pm4;5)$. *Указание.* Поскольку $y \geq 0$, а $\left(y^2 - x^2\right)^2 \geq (2y-1)^2$, имеем $(2y-1)^2 \leq 16 + 1$, откуда $y \leq 5$.

2. Докажем утверждение от противного. Пусть верх квадрата склеен с низом. Возьмем раскраску, противоречащую условию. Будем называть весом линии количество черных клеток на ней. Пусть есть горизонталь веса n. Тогда n вертикалей и n диагоналей каждого направления должны иметь веса 1, 2, ..., n, так как все они пересекают эту горизонталь. Тогда и n горизонталей имеют веса 1, 2, ..., n, так как все они пересекают вертикаль веса n.

Циклически переставим горизонтали так, чтобы нижняя имела вес n (свойства раскраски при этом не изменятся). Пронумеруем горизонтали снизу вверх от 0 до $n - 1$, а вертикали — от 0 до $n - 1$, начиная с вертикали веса n.

Каждая диагональ пересекает по разу горизонталь и вертикаль веса n, поэтому диагонали веса 1 должны проходить через клетку их пересечения — клетку (0, 0). Итак, все клетки (i,i) и $(n - i,i)$, $i > 0$ — пустые.

Если n нечетно, то в каждом столбце, кроме 0, получаем не менее двух пустых клеток, и столбца веса $n - 1$ не найдется. Если $n = 2m$, то столбец m и строка m должны иметь вес $m - 1$ (в них закрашены все клетки, кроме (m,m)). Но тогда мы не сможем найти столбца веса 1.

Если с самого начала отсутствует горизонталь веса n, то есть горизонталь веса 0, и мы можем провести те же рассуждения, поменяв ролями закрашенные и незакрашенные клетки.

4. Лемма. Если $2k$-угольник можно разбить на прямоугольники, то его можно разбить на не более чем $k - 1$ прямоугольник.

Доказательство леммы. Сумма углов многоугольника $S = (2k-2) \cdot 180^\circ$ и все углы в нем, очевидно, по 90° или по 270°. Если все они по 90°, то это прямоугольник. Пусть найдется угол A в 270°. Продолжим одну из его сторон внутрь многоугольника до пересечения с контуром. Многоугольник разобьется на две части, причем сумма внутренних углов частей не превосходит суммы внутренних углов многоугольника (продолжение стороны отрезает от угла A угол в 90°, который попадает в одну из частей, и угол в 180°, который лежит на стороне другой части и поэтому исчезает; в то же время дополнительно в этих частях могут возникнуть только два угла по 90°, там, где продолжение стороны дошло до контура многоугольника). Заметим, что общее количество углов в 270° уменьшилось. Если они еще остались, будем повторять операцию с частями. В конце мы получим n частей без углов 270°, т.е. n прямоугольников с общей суммой углов $S = 360^\circ n \leq (2k-2) \cdot 180^\circ$, откуда $n \leq k - 1$.

Из леммы следует, что в этом многоугольнике число вершин больше 200, иначе его можно разбить на 99 прямоугольников. Разобьем его на m треугольников и рассмотрим сумму их углов: $S = 180^\circ m$. Найдем теперь S, учитывая, что углы треугольников входят в состав углов многоугольника. Каждый угол многоугольника дает вклад не менее 90° (из угла 270° может быть вычтено 180°, если его вершина лежит на стороне какого-нибудь треугольника), поэтому $S = 180^\circ m > 200 \cdot 90^\circ$, откуда $m > 100$, что и требовалось доказать.

Замечание. Оценка в задаче является точной: объединение клеток квадрата 100×100, кроме клеток, лежащих выше главной диагонали, дает пример многоугольника, который главной диагональю разбивается на 101 треугольник.

5. *Ответ*: не существуют.

Предположим противное. Если у многочлена $kx^2 + lx + m$ с целыми коэффициентами два целых корня x_1 и x_2, то m и l делятся на k, потому что $x_1 x_2 = \frac{m}{k}$, а $x_1 + x_2 = -\frac{l}{k}$. Из чисел a и $a + 1$ одно четное. Без потери общности можно считать, что четное — a. Тогда b и c тоже четные. Отсюда $(b + 1)$ и $(c + 1)$ нечетные. Пусть y_1 и y_2 — целые корни уравнения $(a+1)x^2 + (b+1)x + (c+1) = 0$. Тогда $y_1 y_2 = \frac{c+1}{a+1}$ и $y_1 + y_2 = \frac{b+1}{a+1}$ — нечетные числа. Получили противоречие: сумма и произведение двух целых чисел не могут одновременно быть нечетными.

6. Пусть L — точка пересечения прямых KO и MN, а прямая, проходящая через L параллельно AC, пересекает AB и BC в точках A_1 и C_1 соответственно (рис.7).

Покажем, что $A_1L = LC_1$. Действительно, $\angle BA_1L = \angle MOL$ как острые углы с соответственно перпендикулярными сторонами. Отсюда четырехугольник A_1MLO — вписанный, и $\angle MLA_1 = \angle MOA_1 = \alpha$. Аналогично $\angle C_1LN = \angle C_1ON = \alpha$. Тогда $\Delta OMA_1 = \Delta OC_1N$, откуда $OA_1 = OC_1$. Значит, ΔA_1OC_1