ный, поэтому $\angle DO_1B = 2\angle DAB$. Для равнобедренного треугольника DO_1B: $\angle DO_1B = \pi - 2\angle BDO_1$. Четырехугольник DO_1O_2A вписанный, поэтому $\angle DO_1O_2 + \angle DAO_2 = \pi$. Из этого следует, что

$$2\angle O_1DB + \angle DAB + \angle O_2AB = \pi.$$

Но O_2 — центр вписанной окружности, следовательно, $\angle O_2AB = \angle O_2AC$. Тогда получаем, что

$$\angle O_1DB + \angle O_2AC = \frac{\pi}{2};$$

$$\angle DO_2O_1 = \angle DAO_1 = \angle DAB + \angle BAO_1 =$$
$$= \angle DAB + \frac{\pi}{2} - 2\angle O_2AC = \pi - 2\angle O_2AC - \angle BDO_1 =$$
$$= \pi - 2(\angle O_2AC - \angle BDO) + \angle BDO_1 = \angle BDO_1.$$

Получим, что $\angle DO_2O_1 = \angle BDO_1$, откуда следует, что BD — касательная.

8. Без ограничения общности можно считать, что $a = 0$, $b, c \ge 0$ и $x \le y \le z$ либо $x \ge y \ge z$. Рассмотрим равенство

$$\sqrt{x} + \sqrt{y+b} + \sqrt{z+c} = \sqrt{x+b} + \sqrt{y+c} + \sqrt{z}. \qquad (1)$$

Вычитая из него $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$, получим после преобразований

$$b\left(\frac{1}{\sqrt{y+b}+\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{x+b}+\sqrt{x}}\right) = c\left(\frac{1}{\sqrt{y+c}+\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{z+c}+\sqrt{z}}\right). (2)$$

Из условий $b, c \ge 0$; $x \le y \le z$ либо $x \ge y \ge z$ получаем четыре возможности:

1) Если $b, c > 0$, то $x = y = z$, что и нужно. Иначе у правой и левой частей равенства (2) разные знаки.

2) Если $b = c = 0$, то $a = b = c = 0$,

3) Если $b = 0$, $c > 0$, то из равенства, аналогичного (1), получим

$$c\left(\frac{1}{\sqrt{x+c}+\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y+c}+\sqrt{y}}\right) = 0, \text{ значит, } x = y,$$

а из (2) $y = z$.

4) Если $b > 0$, $c = 0$, то, как и раньше, $x = y = z$.

11 КЛАСС

2. Пусть $M(x_0, y_0)$ — точка пересечения медиан. Прямая $x = x_0$ делит квадрат на две части. В одной из частей находится ровно 1 точка (вершина треугольника). Пусть ее координаты $A(x_1, y_1)$, а двух других — $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Тогда $\vec{AM} = \vec{MB} + \vec{MC}$ и, значит, $|x_0 - x_1| = |x_0 - x_2| + |x_0 - x_3|$. Поэтому после отражения относительно точки M точки B и C перейдут в полосу, ограниченную прямыми $x = x_0$ и $x = x_1$. Проведя аналогичные рассуждения для y, получим, что какие-то 2 точки перешли в полосу, ограниченную прямыми $y = y_0$ и $y = y^*$ (где y^* — координата по y одной из вершин треугольника). Одна из этих точек будет B или C, после отражения относительно M она, как мы доказали, останется внутри квадрата.

3. Пусть таких чисел конечное число, тогда для всех n, начиная с некоторого, $S(3^n) < S(3^{n+1})$. Но 3^n, 3^{n+1} делятся на 9, поэтому $S(3^n)$ и $S(3^{n+1})$ делятся на 9, значит, $S(3^n) \le S(3^{n+1}) - 9$. Тогда $S(3^{N+k}) \ge S(3^N) + 9k > 9k$, значит, число имеет более k знаков: $3^{N+k} > 10^k$. Отсюда при $k = N$ получаем $3^{2N} > 10^N$ — противоречие.

5. Пусть A и B — фракции. Тогда $\overline{A \cup B} = \overline{A}$ — тоже фракция и, значит, $\overline{\overline{A \cup B}} = A \cup B$ также является фракцией.

6. Поскольку $\log_a b > 1$, то $\log_a \log_a b > \log_b \log_a b$, а так как $\log_c a < 1$, то $\log_c \log_c a > \log_b \log_c a$. Отсюда $\log_a \log_a b + \log_b \log_b c + \log_c \log_c a > \log_b \log_a b + \log_b \log_b c + \log_b \log_c a = \log_b(\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a) = \log_b 1 = 0$.

7. *Ответ*: не существуют. Предположим, что $ABCD$ и $SA_1A_2\ldots A_n$ такие треугольная и n-угольная пирамиды, что четыре трехгранных угла n-угольной пирамиды с вершинами A_i, A_j, A_k, A_l равны трехгранным углам треугольной пирамиды с вершинами A, B, C и D. Тогда сумма всех плоских углов трехгранных углов с вершинами A_i, A_j, A_k, A_l равна $4 \cdot 180° = 720°$. С другой стороны, по свойству трехгранных углов, $\angle A_{m-1}A_mA_{m+1} < \angle A_{m-1}A_mS + \angle A_{m+1}A_mS$, поэтому $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1} + \angle A_{j-1}A_jA_{j+1} + \angle A_{k-1}A_kA_{k+1} + \angle A_{l-1}A_lA_{l+1} < \frac{1}{2} \cdot 720° = 360°$. Но сумма всех углов многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ равна $180° \cdot (n-2)$, поэтому сумма остальных $n - 4$ углов многоугольника больше $180°(n-2) - 360° = 180°(n-4)$, что невозможно, так как многоугольник — выпуклый.

8. Для $\alpha = 1$ — существует: $f(x) = x$. Для $\alpha \ne 1$ для любого x существует y, такое что $y = \alpha(x+y)$: $y = \frac{\alpha x}{1-\alpha}$. Но тогда $f(y) = f(x) + f(y)$, откуда $f(x) = 0$ для любого x.

Заключительный этап

9 класс

2. Пусть O — центр поворота, R — наибольшее из расстояний от точки O до вершин многоугольника, A_1 — одна из вершин, такая, что $OA_1 = R$. Если A_1 переходит при повороте в вершину A_2, A_2 — в A_3, A_3 — в A_4, то, очевидно, $A_1A_2A_3A_4$ — квадрат с центром в точке O.

Если r — наименьшее из расстояний от O до вершин многоугольника, то $r > \frac{R}{\sqrt{2}}$. В самом деле, из выпуклости многоугольника следует, что и любые пять его вершин определяют выпуклый многоугольник. Поэтому внутри и на границе квадрата $A_1A_2A_3A_4$ нет (кроме A_1, A_2, A_3 и A_4) вершин многоугольника, откуда и следует неравенство $r > \frac{R}{\sqrt{2}}$. Теперь в качестве кругов, удовлетворяющих условию, можно взять любые два круга с центром O, радиусы r_1 и R_1 которых таковы, что $\frac{R}{\sqrt{2}} < r_1 < r$ и $R_1 = r_1\sqrt{2}$.

Замечание. Справедливо следующее утверждение: если выпуклый многоугольник M переходит в себя при повороте на угол α ($\alpha < 180°$), то найдутся два круга с отношением радиусов, равным 2, один из которых содержит M, а другой содержится в M. Попробуйте доказать его самостоятельно.

3. Для удобства вместо боковой поверхности параллелепипеда $a \times b \times c$ рассмотрим боковую поверхность цилиндра высотой c и длиной окружности основания $2(a + b)$, разбитую на единичные «квадраты» линиями, параллельными окружностям оснований, и образующими. (Для того чтобы превратить «квадраты» в квадраты, их следует разогнуть.)

Проведем плоскость через ось симметрии цилиндра и через центры единичных «квадратов» в каком-нибудь столбце S шириной 1 и высотой c на поверхности цилиндра. Докажем, что никакая оклейка прямоугольниками, состоящими из четного числа единичных квадратов, удовлетворяющая условию задачи, не симметрична относительно этой плоскости. Действительно, в противном случае столбец S оказался бы покрыт прямоугольниками нечетной ширины. Площадь каждого