обязательно найдутся два, дающие одинаковые остатки. Именно их должен оставить партнер начинающего (сумма не будет делиться на 3).

3. Занумеруем яблоки в порядке возрастания веса и разобьем их на пары: в k-ю пару войдут яблоки с номерами k и $301-k$. Докажем, что веса пар различаются не более чем в 2 раза. Пусть веса яблок a, b, c, d. Имеем: $0\le a\le b\le c\le d\le 3a$. Тогда $a+d\le 4a\le b+c$, $b+c\le 3a+d\le 2a+2d$. Проведем с парами яблок ту же процедуру. Аналогично доказывается, что веса четверок яблок различаются не более чем в $3/2$ раза, что и требовалось.

4. Запрещенных «сочетаний цифр» конечное число, следовательно, есть число N такое, что все запрещенные «сочетания цифр» не длиннее N символов. В бесконечной десятичной дроби можно найти два одинаковых куска длины N. Пусть у дроби $a_0, a_1a_2, \ldots$, куски $a_k\ldots a_{k+N-1}$ и $a_l\ldots a_{l+N-1}$ совпали. Докажем, что дробь $0,(a_k\ldots a_{l-1})$ удовлетворяет условию. Предположим противное: в этой дроби есть запрещенные «сочетания цифр». Возьмем то, которое встречается самым первым. Очевидно, что хотя бы один символ из данного запрещенного «сочетания цифр» попадет в первый период. Но тогда конец этого «сочетания цифр» и имеет номер не более $l-1-k+N$, т.е. оно будет содержаться в куске $a_k\ldots a_{l+N-1}$ исходной дроби.

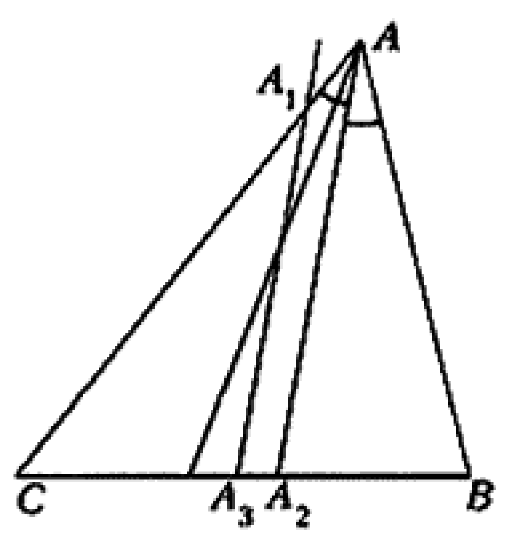

Рис. 3

5. Пусть сумма чисел в наборе равна M, тогда число a из набора заменяется на число $b=M-a$. Просуммируем эти равенства для всех a: $b_1+\ldots+b_{1997}=1997M-(a_1+\ldots+a_{1997})$, откуда $M=0$, так как $b_1+\ldots+b_{1997}=a_1+\ldots+a_{1997}=M$. Значит, для любого a число $b=-a$ также входит в набор и все числа разбиваются на пары a, $-a$. Из нечетности их количества следует, что в набор входит число $a=-a$, т.е. $a=0$.

7. Пусть биссектриса $\angle A$ пересекает BC в точке A_2, а l_A — в точке A_3 (рис.3). Аналогично определим B_2, B_3, C_2 и C_3. Тогда если $CA_3\le CA_2$ (другой случай аналогичен), то

$$A_3B=CB-CA_3=CA_2+BA_2-CA_3=CA_2\left(1+\frac{AB}{AC}\right)-CA_3$$

по свойству биссектрисы. Тогда по теореме Фалеса

$$A_3B=CA_3\left(\frac{CA_2}{CA_3}\left(1+\frac{AB}{AC}\right)-1\right)=CA_3\left(\frac{CA}{CA_1}\left(1+\frac{AB}{AC}\right)-1\right)=CA_3,$$

так как, по условию, $AC+AB=2C_1A_1$. Итак, вершины $\Delta A_3B_3C_3$ — середины сторон ΔABC, поэтому они пересекаются в одной точке.

10 класс

1. В памяти есть число x. Сложением его с самим собой получаем $2x$. Сравниваем эти числа (x и $2x$). Если они равны, то $x\ne 1$, в противном случае найдем корни уравнения

$$y^2+2xy+x=0,\ y_{1,2}=-x\pm\sqrt{x^2-x}.$$

Если $y_1\ne y_2$ или корней нет, то $x\ne 1$, в противном случае $x=1$.

2. Пусть у прямоугольника $ABCD$ точки A, $C\in S_1$, точки B, $D\in S_2$. Пусть точка O — пересечение его диагоналей. Проведем через M и O прямую до следующего пересечения с S_1 и S_2 в точках N_1 и N_2 соответственно. Так как точка O лежит внутри обеих окружностей, то N_1 и N_2 лежат по одну сторону от O. При этом по теореме о хордах $MO\cdot ON_1=AO\cdot OC=BO\cdot OD=MO\cdot ON_2$, так как $AO=OC=OB=OD$, а значит, $ON_1=ON_2$ и $N_1=N_2=N$. Наоборот, проведя через любую точку O на интервале MN хорды AC и BD в окружностях S_1 и S_2 так, что $AO=OC$, $BO=OD$, получим из теоремы о хордах $AO^2=MO\cdot ON=BO^2\Rightarrow AO=OC=BAO=OD\Rightarrow ABCD$ — прямоугольник.

3. Из равенства

$$2^{kn}-1=\left(2^n-1\right)\left(2^{n(k-1)}+2^{n(k-2)}+\ldots+1\right)$$

следует, что $2^{kn}-1$ делится на 2^n-1, поэтому

$$2^{kn+d}-1=2^{kn+d}-2^d+2^d-1=2^d\left(2^{kn}-1\right)+2^d-1=2^d-1\left(\bmod 2^n-1\right).$$

Таким образом, 2^n-1 делится на 2^m-1 тогда и только тогда, когда n делится на m. Если $n=km$, то

$$\frac{2^{km}-1}{2^m-1}=1+2^m+\ldots+2^{m(k-1)}.$$

Каждое слагаемое дает остаток 1 при делении на 2^m-1, поэтому

$$\frac{2^{km}-1}{2^m-1}\equiv k\left(\bmod 2^m-1\right).$$

Тогда $k=\frac{n}{m}$ делится на $\left(2^m-1\right)$, что равносильно тому, что n делится на $m\left(2^m-1\right)$.

4. *Ответ*: нельзя. Пусть искомая оклейка существует. Закрасим 27 квадратиков этих трех граней так, как показано на рисунке 4. Тогда любая полоска 3×1 закрывает четное число закрашенных квадратиков. Поэтому оклеить эти грани полосками так, как требуется в условии, не удастся.

5. Как и в задаче 5 для 9 класса, получаем, что числа в наборе разбиваются на пары a, $-a$. Числа различны, поэтому нуль не входит в набор. Значит, среди этих чисел 50 положительных и 50 отрицательных, следовательно, их произведение положительно.

6. *Ответ*: 12. *Указание*. Если число машин равно 11, то заведомо найдется день, когда не смогут выехать 2 машины. Двенадцати машин достаточно (убедитесь в этом).

7. Пусть O_1 — центр описанной окружности, тогда $BO_1=DO_1=AO_1$ (рис.5). Углы $\angle DO_2O_1$ и $\angle DAO_1$ равны как вписанные. Далее, $\angle DO_1B$ центральный, а $\angle DAB$ вписан-

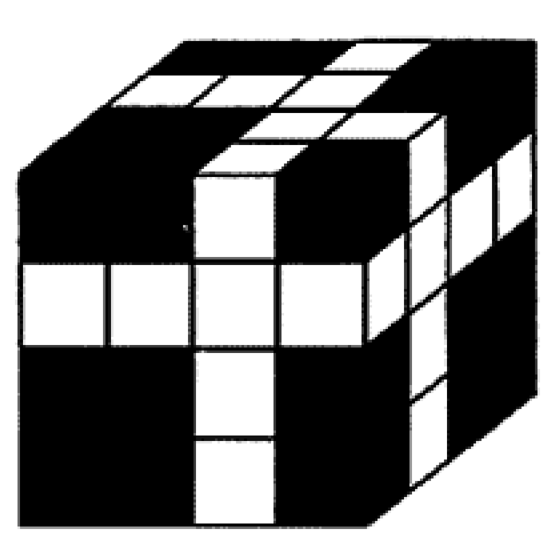
Рис. 4

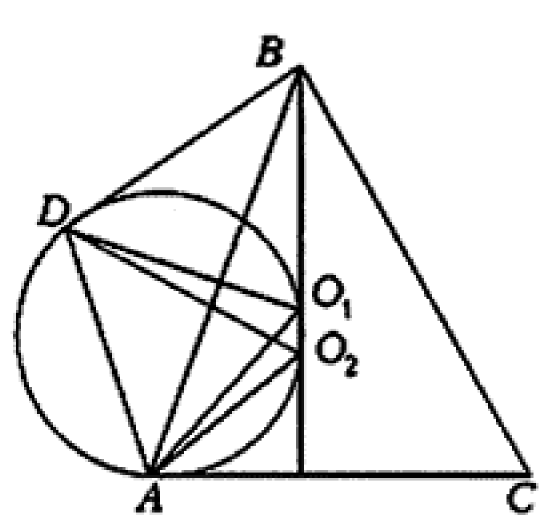

Рис. 5