13. В начальный момент падения плотность газа внизу сосуда больше, чем вверху. В состоянии свободного падения молекулы газа равномерно распределятся по всему объему сосуда. Однако их полная кинетическая энергия не изменится, значит, не изменится и температура газа.
14. Вся кинетическая энергия движения газа как целого перейдет во внутреннюю энергию газа и сосуда, т.е. возрастет температура газа, а значит, и его давление.
15. Нет. Температура воздуха определяется не направленной скоростью ветра, а хаотическими движениями, которые молекулы совершают наряду с направленным движением газа как целого и независимо от него.

Микроопыт

Для нашего ощущения совершенно несущественна суммарная внутренняя энергия воздуха в комнате (кстати, она вообще не меняется при протапливании — почему?). Но мы очень чувствительны к температуре, определяемой энергией, приходящейся в среднем на одну молекулу, — а именно она и возросла.

КОРПУСКУЛЯРНЫЕ СВОЙСТВА СВЕТА

1. $v = 2P\tau/(mc) = 5$ см/с.
2. $F_{ср} = W\sqrt{5-2\sqrt{3}}/(2c\tau) = 0{,}62$ Н.
3. $\varphi_{max} = (hc/\lambda - A)/e = 1{,}74$ В.
4. $\nu = \nu_0(1+v/c)$.

XXIII ВСЕРОССИЙСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Зональный этап

8 класс

1. Если рядом с 16 стоит число x, то $16 + 1 \le 16 + x = a^2 \le 16 + 15$, откуда $a^2 = 25$ и $x = 9$. Поэтому у 16 не может быть более одного соседа и удовлетворяющее условию расположение чисел по кругу невозможно. Пример расположения в строку: 16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8.
2. Занумеруем яблоки в порядке неубывания весов и положим в k-й пакет яблоки с номерами k и $301 - k$. Для любых двух пакетов получаем, что в одном из них — яблоки с весами a и d, в другом — с весами c и d, где $a \le b \le c \le d$. Имеем: $a + d \le c + 2b \le 1{,}5c + 1{,}5b$ и $b + c \le 2a + d \le 1{,}5a + 1{,}5d$, что и требовалось.

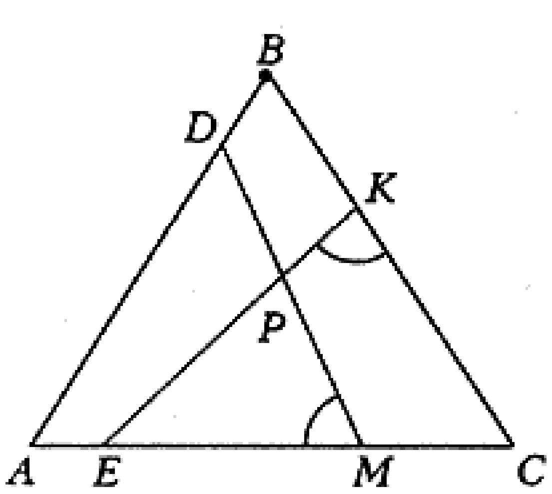

Рис. 2

3. Из условия следует, что $CE = AC - AE = AD$ (рис.2) и, аналогично, $CK = AM$. Отсюда следует, что $\Delta MAD = \Delta ECK$ и, значит, $\angle MPE = 180° - \angle PME - \angle PEM = 180° - \angle PKC - \angle PEC = \angle C = 60°$. Если отрезки DM и EK не пересекаются, то аналогичные рассуждения проводятся для вертикальных углов.
4. Если на предприятии k «верховных» начальников, то каждый работник должен увидеть хотя бы один из k приказов этих начальников. В понедельник их увидели не более $7k$ работников, во вторник — не более $7k \cdot 6$, в среду — не более $7k \cdot 36$ работников. Все, кто увидел эти приказы в четверг, не имеют подчиненных; значит, они все имеют по 7 начальников и количество всех их начальников не более $7k \cdot 36$, т.е. в четверг приказы увидели не более $6k \cdot 36$ работников. Таким образом, $50\,000 \le k + 7k + + 42k + 254k + 216k = 518k$ и $k \ge 97$.
5. Пусть O — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Тогда $\angle OAB < 45°$, $\angle OBA < 45°$, поэтому точка O находится внутри K_1, значит, треугольник OAB покрывается квадратом K_1. Аналогично, OBC и OCA покрываются соответственно K_2 и K_3.
6. *Ответ*: 2. Пусть на последнем месте в строке стоит число x. Сумма всех чисел в строке, кроме x, делится на x; но тогда и сумма всех чисел в строке, равная $1 + 2 + \ldots + 37 = 37 \cdot 19$, делится на x. Отсюда $x = 19$, так как 37 уже поставлено на первое место. На третьем месте стоит делитель $37 + 1 = 38 = 19 \cdot 2$, отличный от 1 и 7, которые стоят на других местах.
Примечание. Такое расположение чисел действительно существует: 37, 1, 2, 20, 3, 21, 4, 22, 5, 23, ..., 18, 36, 19. В нем сумма первых $2k$ слагаемых равна $(k+1)\cdot(k+18)$, а числа, стоящие на $(2k + 1)$ и $(2k + 2)$ местах, равны, соответственно, $k + 1$ и $k + 19$.
7. *Ответ*: $p = 7$, $q = 3$. Пусть сначала ни одно из чисел p, q не делится на 3. Если остатки от деления p и q на 3 совпадают, то левая часть делится на 3, а правая — нет. Пусть теперь p делится на 3, тогда $p = 3$. Из равенства $p^3 - q^5 = (p+q)^2 > 0$ следует $p^3 > q^5$ и $q^5 < 27$, что невозможно. Пусть, наконец, q делится на 3, тогда $q = 3$ и $p^3 - 243 = (p+3)^2$, $p(p^2 - p + 6) = 252$, откуда p — простой делитель 252, т.е. 2, 3 или 7. Проверка оставляет только $p = 7$, $(p, q) = (7, 3)$.
8. Обозначим число автомобилей в семье через n. Сумма количеств запрещенных дней по всем машинам, равная $2n$, не превосходит $7 \cdot (n-10)$, так как в каждый из 7 дней недели снимаются с поездок не более $n - 10$ машин. Итак, $2n \le 7(n - 10)$ и $n \ge 14$. Четырнадцати машин достаточно: запретим четырем машинам понедельник и вторник, четырем — среду и четверг, двум — пятницу и субботу, двум — субботу и воскресенье, двум — пятницу и воскресенье.

9 класс

1. Для любого треугольника данного разбиения окружность, описанная около правильного 1997-угольника, является описанной. Так как центр окружности, описанной около правильного 1997-угольника, не лежит на диагонали, то он попадет внутрь какого-то одного треугольника.
Треугольник остроугольный, если центр описанной окружности лежит внутри, и тупоугольный, если центр описанной окружности лежит вне. Следовательно, треугольник, в который попал центр описанной окружности, остроугольный, все остальные — тупоугольные.
2. *Ответ*: выигрывает партнер игрока, делающего первый ход.
Укажем, как партнер начинающего может гарантировать себе выигрыш. В начале партии он должен стирать числа, кратные 3, до тех пор, пока таковых не останется. Поскольку количество чисел, не превосходит 1000 и кратных 3, равно 333, то партнеру начинающего понадобится не более 333 ходов для того, чтобы ни одно из оставшихся на доске чисел не делилось на 3 (некоторые из чисел, кратных 3, могут быть стерты и начинающим). После этого он делает свои ходы произвольно вплоть до того момента, когда на доске останутся три числа. Каждое из них будет давать остаток 1 и 2 при делении на 3, поэтому среди трех остающихся на доске чисел