«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ
ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №4)

1. До начала 2000 года останется 2000 часов в 16 часов 9 октября 1999 года.

2. Если обозначить через x_1 ту часть всей работы, которую выполняет в час первый чертенок, а через x_2, x_3 и x_4 — соответствующие доли для остальных чертенят, то из условий задачи можно составить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=\dfrac{1}{3}, \\ 2x_1+\dfrac{x_2}{2}+x_3+x_4=\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{x_1}{2}+2x_2+x_3+x_4=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Казалось бы, такую систему однозначно разрешить невозможно. Но попробуем. Вычтя из второго и третьего уравнений первое, получим, что $x_1-\dfrac{x_2}{2}=0$ и $-\dfrac{x_1}{2}+x_2=\dfrac{1}{6}$. Отсюда $x_1=1/9$, $x_2=2/9$. Подставив эти значения в любое из первоначальных уравнений, получим, что $x_3+x_4=0$, т.е. суммарная производительность третьего и четвертого чертенят равна нулю. Это означает, что они попросту ни черта не делали, а значит, отстранение одного из них от работы никак не скажется на времени ее выполнения: первые три чертенка начертили бы чертеж за те же 3 часа.

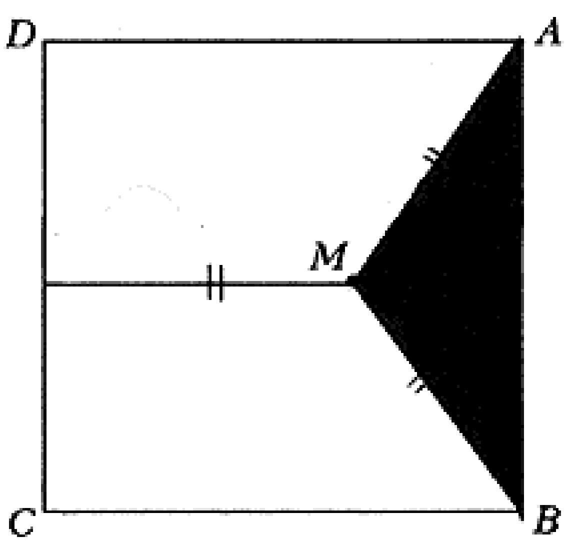

Рис. 1

3. Сумма чисел в k-м уголке равна $2k(1+2+\ldots+k)-k^2=k^2(k+1)-k^2=k^3$.

4. Утверждение задачи вытекает из тождества

$$n+(n-1)n(n+1)=n^3.$$

5. Обозначим величину стороны квадрата через a, а расстояние от точки M до точек A и B через x. Тогда (рис.1) высота MN треугольника ABM равна $(a-x)$ и из треугольника AMN по теореме Пифагора получаем, что $x^2=\dfrac{a^2}{4}+a^2--2ax+x^2$, откуда $x=5a/8$, а $MN=3a/8$, поэтому площадь треугольника ABM равна $3a^2/16$, т.е. составляет $3/16$ площади всего квадрата.

НА ЧАСОК К СЕМЕЙКЕ РЕПЬЮНИТОВ

1. Суммой девяти одинаковых слагаемых, по-видимому, является репьюнит R_9. Известно, что $R_9=111111111=3^2\cdot37\cdot333\,667$, откуда $R_9:9=37\cdot333\,667=12345679$ — все цифры разные, как и должно быть для расшифровки слова «репьюнит».
Ответ: РЕПЬЮНИТ = 12345679.

2. Поскольку наибольшая цифра палиндрома 5 и занимает среднюю позицию в его записи, то множителем этого палиндрома является R_5. Количество цифр произведения равно 12. Так как $12+1-5=8$, то другой множитель — число R_8.

3. Простые делители репьюнита R_7 — 239 и 4649. Цена нового автомобиля, по-видимому, больше, чем 239 долларов, поэтому фирмой было продано 239 автомашин по цене 4549 долларов за каждую.

4. Квадрат семизначного числа, все цифры которого одинаковы, оказался 13-значным палиндромом с семью различными числами. Таким и должен быть квадрат репьюнита R_7: $1111111^2=1234567654321$.

5. В десятичной системе счисления: $R_1=1$, $R_{n+1}=10R_n+1$.

6. Два репьюнита имеют общий множитель только тогда, когда их номера n имеют общий простой делитель. Поскольку: а) два последовательных числа не имеют общего простого делителя, то R_n и R_{n+1} взаимно просты, б) два последовательных нечетных числа не имеют общего простого делителя, то R_{2n+1} и R_{2n+3} взаимно просты, в) два последовательных четных числа имеют общим простым делителем число 2, то R_{2n} и R_{2n+2} не являются взаимно простыми; их единственным общим простым делителем будет репьюнит $R_2=11$.

7. В системе счисления с основанием b репьюнит $R(b,n)$ может быть записан в форме $(b^n-1)(b-1)=b^0+b+b^2+\ldots$ $\ldots+b^{n-1}$, т.е. представляет собой сумму степеней с показателями степени 0, 1, 2, ..., $(n-1)$. Когда b четно, каждое из этих слагаемых, кроме $b^0=1$, четно, поэтому все такие репьюниты — нечетные числа. Когда b нечетно, каждая степень числа b нечетна. Тогда, если n нечетно, то репьюнит нечетен, если же n четно, то репьюнит четен. Поэтому репьюнит при нечетном основании будет четен только тогда, когда количество единиц в репьюните четно.

8. При всяком натуральном n справедливо равенство

$$\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ единиц}}2\underbrace{1\ldots11}_{n\text{ единиц}}=\underbrace{11\ldots11}_{n+1\text{ единиц}}\underbrace{00\ldots0}_{n\text{ нулей}}+\underbrace{11\ldots11}_{n+1\text{ единиц}}=\underbrace{11\ldots11}_{n+1\text{ единиц}}\cdot\left(10^n+1\right).$$

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. На Земле пылинки большой массы быстро оседают на ее поверхности, а пылинки малой массы из-за хаотичности движения молекул воздуха могут долго удерживаться во взвешенном состоянии. На Луне же из-за отсутствия атмосферы пылинки любой массы быстро и практически одновременно осаждаются на ее поверхность.

2. Нет. Над влажной почвой парциальное давление водяного пара будет повышенным. Значит (по закону Дальтона), «вклад» давления азота (как и кислорода) должен быть несколько меньшим, чем над сухой почвой.

3. В соответствии с уравнение Менделеева — Клапейрона, любые два из трех параметров — давления, объема и температуры газа — задают его состояние.

4. Уменьшилась.

5. Легкие, а значит, более подвижные молекулы водорода быстрее проникают сквозь перепонку и увеличивают давление в секции с воздухом. По мере проникновения через перепонку воздуха давления в обеих секциях выравниваются.

6. Показания обоих манометров будут несколько большими p из-за добавления аэростатического давления столбов газа. При этом первый манометр покажет меньшее давление, чем второй (так как высоты сосудов различны).

7. И в невесомости сохраняется хаотическое движение молекул газов, составляющих «атмосферу» кабины.

8. Нет. Молекулы, движущиеся вверх после столкновения с полом, замедляют свое движение под действием силы тяжести. Их удары о потолок менее «энергичны», чем о пол.

9. Нет. Для определения давления важно среднее значение кинетической энергии молекул, а оно, при условии теплового равновесия между газом и стенкой сосуда, одно и тоже.

10. Нет. Средние кинетические энергии поступательного движения молекул этих газов действительно равны. Но поскольку азот — двухатомный газ, полная кинетическая энергия его молекул, включающая и энергию вращательного движения, больше, чем у неона.

11. Нет. Уменьшение кинетической энергии молекул у холодной стенки компенсируется увеличением их концентрации и наоборот.

12. Поскольку газ не совершает работы, его внутренняя энергия не изменяется, следовательно, температура останется прежней.