и ACB соответственно. Докажите, что прямые l_A, l_B и l_C пересекаются в одной точке.

М.Сонкин

8. См. задачу 8 для 8 класса.

10 КЛАСС

1. Микрокалькулятор «МК-97» умеет над числами, занесенными в память, производить только три операции:

а) проверять, равны ли выбранные два числа;

б) складывать выбранные числа;

в) по выбранным числам a и b находить корни уравнения $x^2 + ax + b = 0$, а если корней нет, выдавать сообщение об этом.

Результаты всех действий заносятся в память. Первоначально в памяти записано одно число x. Как с помощью «МК-97» узнать, равно ли это число единице?

И.Рубанов

2. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках M и N. Докажите, что если вершины A и C некоторого прямоугольника $ABCD$ лежат на окружности S_1, а вершины B и D — на окружности S_2, то точка пересечения его диагоналей лежит на прямой MN.

Л.Смирнова

3. m, n — натуральные числа. Докажите, что число $2^n - 1$ делится на число $(2^m - 1)^2$ тогда и только тогда, когда число n делится на число $m(2^m - 1)$.

О.Тен

4. Дан куб со стороной 4. Можно ли целиком оклеить 3 его грани, имеющие общую вершину, 16 бумажными прямоугольными полосками размерами 1×3?

Л.Емельянов

5. Дан набор, состоящий из 100 различных чисел таких, что если каждое число в наборе заменить на сумму остальных, то получится тот же набор. Докажите, что произведение чисел в наборе положительно.

А.Фомин

6. В городе Мехико для ограничения транспортного потока для каждой частной автомашины устанавливаются один день в неделю, в который она не может выезжать на улицы города. Состоятельная семья из 10 человек подкупила полицию и для каждой машины они называют 2 дня, один из которых полиция выбирает в качестве «невыездного» дня. Какое наименьшее количество машин нужно купить семье, чтобы каждый день каждый член семьи мог самостоятельно ездить, если утверждение «невыездных» дней для автомобилей идет последовательно?

И.Ященко

7. Точки O_1 и O_2 — центры описанной и вписанной окружностей равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$). Окружности, описанные около треугольников ABC и O_1O_2A, пересекаются в точках A и D. Докажите, что прямая BD касается окружности, описанной около ΔO_1O_2A.

М.Сонкин

8. Докажите, что если

$$\sqrt{x+a}+\sqrt{y+b}+\sqrt{z+c} = \sqrt{y+a}+\sqrt{z+b}+\sqrt{x+c} = \sqrt{z+a}+\sqrt{x+b}+\sqrt{y+c}$$

для некоторых a, b, c, x, y, z, то $x = y = z$ или $a = b = c$.

М.Сонкин

11 КЛАСС

1. См. задачу 1 для 10 класса.

2. Все вершины треугольника ABC лежат внутри квадрата K. Докажите, что если все их отразить симметрично относительно точки пересечения медиан треугольника ABC, то хотя бы одна из полученных трех точек окажется внутри K.

В.Дольников

3. Обозначим через $S(N)$ сумму цифр натурального числа N. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что

$$S(3^n) \ge S(3^{n+1}).$$

А.Белов

4. См. задачу 4 для 10 класса.

5. Члены Государственной Думы образовали фракции так, что для любых двух фракций A и B (не обязательно различных) $\overline{A \cup B}$ — тоже фракция (через $\overline{C}$ обозначается множество всех членов Думы, не входящих в C). Докажите, что для любых двух фракций A и B $A \cup B$ — также фракция.

А.Скопенков

6. Докажите, что если $1 < a < b < c$, то

$$\log_a(\log_a b)+\log_b(\log_b c)+\log_c(\log_c a)>0.$$

С.Токарев

7. Существуют ли выпуклая n-угольная ($n \ge 4$) и треугольная пирамиды такие, что четыре трехгранных угла n-угольной пирамиды равны трехгранным углам треугольной пирамиды?

Н.Агахапов, Р.Карасев

8. Для каких α существует функция $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, отличная от константы, такая, что

$$f(\alpha(x+y)) = f(x)+f(y)?$$

Л.Емельянов

Заключительный этап

9 КЛАСС

1. См. задачу М1609 (а) из «Задачника «Кванта».

2. Выпуклый многоугольник M переходит в себя при повороте на угол 90°. Докажите, что найдутся два круга с отношением радиусов, равным $\sqrt{2}$, один из которых содержит M, а другой содержится в M.

А.Храбров

3. Боковая поверхность прямоугольного параллелепипеда с основанием $a\times b$ и высотой c (a, b и c — натуральные числа) оклеена без наложений и пропусков прямоугольниками со сторонами, параллельными ребрам параллелепипеда, каждый из которых состоит из четного числа единичных квадратов. При этом разрешается перегибать прямоугольники через боковые ребра параллелепипеда. Докажите, что если c нечетно, то число способов оклейки четно.

Д.Карпов, С.Рукшин, Д.Фон-Дер-Флаасс

4. См. задачу М1610 (а) из «Задачника «Кванта».

5. Существуют ли действительные числа b и c такие, что каждое из уравнений $x^2 + bx + c = 0$ и $2x^2 + (b+1)x + c + 1 = 0$ имеет по два целых корня?

Н.Агаханов

6. В классе 33 человека. У каждого ученика спросили, сколько у него в классе тезок и сколько однофамильцев (включая родственников). Оказалось, что среди названных чисел встретились все целые от 0 до 10 включительно. Докажите, что в классе есть два ученика с одинаковыми именем и фамилией.

А.Шаповалов

7. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC и CA в точках M, N и K соответственно. Прямая, проходящая через вершину A и параллельная NK, пересекает прямую MN в точке D. Прямая, проходящая через A и параллельная