XXIII Всероссийская математическая олимпиада школьников

IV (зональный) этап олимпиады проходил 18 — 23 марта 1997 года в Долгопрудном, Ростове-на-Дону, Белорецке и Новосибирске.

V заключительный этап проводился в Калуге 19 — 26 апреля.

Как всегда, соревнования проходили два дня, в каждый из которых участникам предлагалось решить четыре задачи.

Ниже мы публикуем задачи этих этапов (в списках задач по каждому классу задачи 1 — 4 предлагались в первый день, а задачи 5 — 8 — во второй).

Задачи

Зональный этап

8 КЛАСС

1. Докажите, что числа от 1 до 16 можно записать в строку, но нельзя записать по кругу так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была квадратом натурального числа.

Н.Агаханов

2. Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более чем в два раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по два яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более чем в полтора раза.

А.Шаповалов

3. На сторонах AB и BC равностороннего треугольника ABC взяты точки D и K, а на стороне AC — точки E и M так, что $DA + AE = KC + CM = AB$. Докажите, что угол между прямыми DM и KE равен 60°.

В.Произволов

4. На предприятии трудится 50 000 человек. Для каждого из них сумма количества его непосредственных начальников и его непосредственных подчиненных равна 7. В понедельник каждый работник предприятия издает приказ и выдает копию этого приказа каждому своему непосредственному подчиненному (если такие есть). Далее, каждый день работник берет все полученные им в предыдущий день приказы и либо раздает их копии всем своим непосредственным подчиненным, либо, если таковых у него нет, выполняет приказы сам. Оказалось, что в пятницу никакие бумаги по учреждению не передаются. Докажите, что на предприятии не менее 97 начальников, над которыми нет начальников.

Е.Малинникова

5. Докажите, что остроугольный треугольник полностью покрывается тремя квадратами, построенными на его сторонах как на диагоналях.

Н.Агаханов

6. Числа от 1 до 37 записали в строку так, что сумма любых первых нескольких чисел делится на следующее за ними число. Какое число стоит на третьем месте, если на первом месте написано число 37, а на втором — 1?

А.Шаповалов

7. Найдите все такие пары простых чисел p и q, что $p^3 - q^5 = (p+q)^2$.

С.Токарев

8.[1] В Мехико для ограничения транспортного потока для каждой частной автомашины устанавливаются два дня недели, в которые она не может выезжать на улицы города. Семье требуется каждый день иметь в распоряжении не менее 10 машин. Каким наименьшим количеством машин может обойтись семья, если ее члены могут сами выбирать запрещенные дни для своих автомобилей?

И.Ященко

9 КЛАСС

1. Правильный 1997-угольник разбит непересекающимися диагоналями на треугольники. Докажите, что среди них ровно один — остроугольный.

А.Шаповалов

2. На доске записаны числа 1, 2, 3, ..., 1000. Двое по очереди стирают по одному числу. Игра заканчивается, когда на доске остаются два числа. Если их сумма делится на три, то побеждает тот, кто делал первый ход, если нет — то его партнер. Кто из них выиграет при правильной игре?

А.Шаповалов

3. Имеются 300 яблок, любые два из которых различаются по весу не более чем в три раза. Докажите, что их можно разложить в пакеты по четыре яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более чем в полтора раза.

А.Шаповалов

4. Назовем «сочетанием цифр» несколько цифр, записанных подряд. В стране Роботландии некоторые сочетания цифр объявлены запрещенными. Известно, что запрещенных сочетаний конечное число и существует бесконечная десятичная дробь, не содержащая запрещенных сочетаний. Докажите, что существует бесконечная периодическая десятичная дробь, не содержащая запрещенных сочетаний.

А.Белов

5. Дан набор, состоящий из 1997 чисел таких, что если каждое число в наборе заменить на сумму остальных, то получится тот же набор. Докажите, что произведение чисел в наборе равно 0.

А.Фомин

6. См. задачу 6 для 8 класса.

7. Дан треугольник ABC. Точка B_1 делит пополам длину ломаной ABC (составленной из отрезков AB и BC), точка C_1 делит пополам длину ломаной ACB, точка A_1 делит пополам длину ломаной CAB. Через точки A_1, B_1 и C_1 проводятся прямые l_A, l_B, l_C, параллельные биссектрисам углов BAC, ABC

---

[1] *См. также задачу 2 для 7 класса Математического праздника («Избранные задачи Московской математической олимпиады», «Квант», №3).*