$-\frac{1}{2} < a < -\frac{23}{47}$, то $1 < x_1 < x_2$.

Итак, исследованы все возможные значения a, когда данное уравнение имеет корни, и в зависимости от этих значений изучено расположение этих корней на оси абсцисс. Из экономии места мы не будем здесь сводить полученные результаты в итоговый ответ.

Сделаем одно замечание. У читателя вполне могло сложиться впечатление, что в некоторых моментах обоснования решения задачи использовались графические соображения. А на вступительных экзаменах такие аргументы не всегда считаются безупречными. Подчеркнем поэтому, что ис-

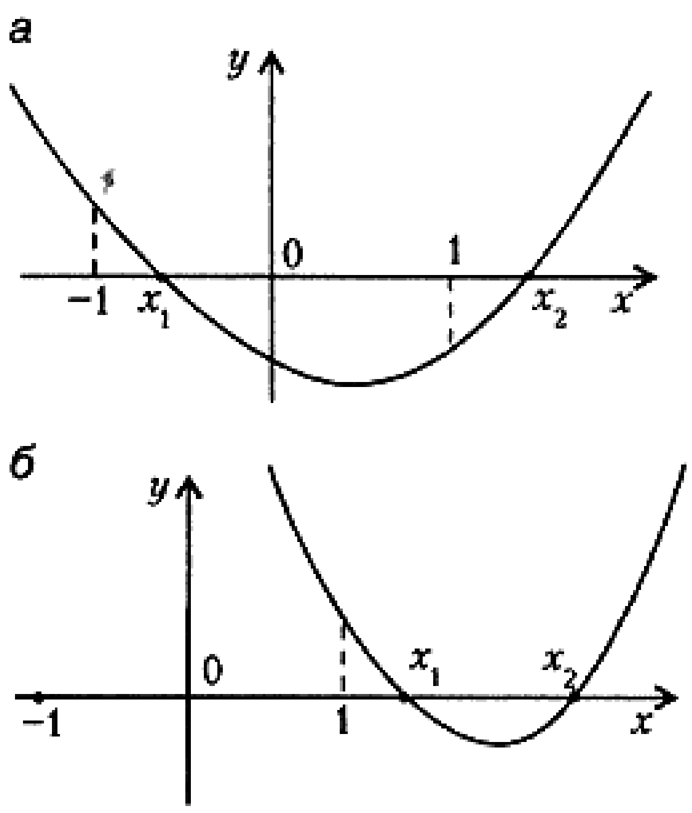

Рис. 5

пользуемые нами графики носят чисто иллюстративный характер; в действительности же в решении использовалось такое утверждение: *квадратный трехчлен* $p(x) = x^2 + px + q$ *имеет ровно один корень в интервале* $c < x < d$, *а другой вне отрезка* $[c;\ d]$ *тогда и только тогда, когда* $p(c)p(d) < 0$.

Отметим также, что при решении этой задачи можно использовать так называемый метод сечений. Для этого заметим, что данное уравнение равносильно уравнению

$$a = f(x),\ \text{где}\ f(x) = -\frac{2x^2 - x + 3}{3x^2 + x + 4}.$$

Проведя с необходимыми обоснованиями полное исследование (например, при помощи производной) свойств графика функции $f(x)$ и используя ее непрерывность при любом значении x, можно довести такой метод решения до конца (эскиз графика $a = f(x)$ показан на рисунке 6).

Пример 11. *Решите уравнение*

$$\sqrt{1-x^2} = \left(a - \sqrt{x}\right)^2. \qquad (1)$$

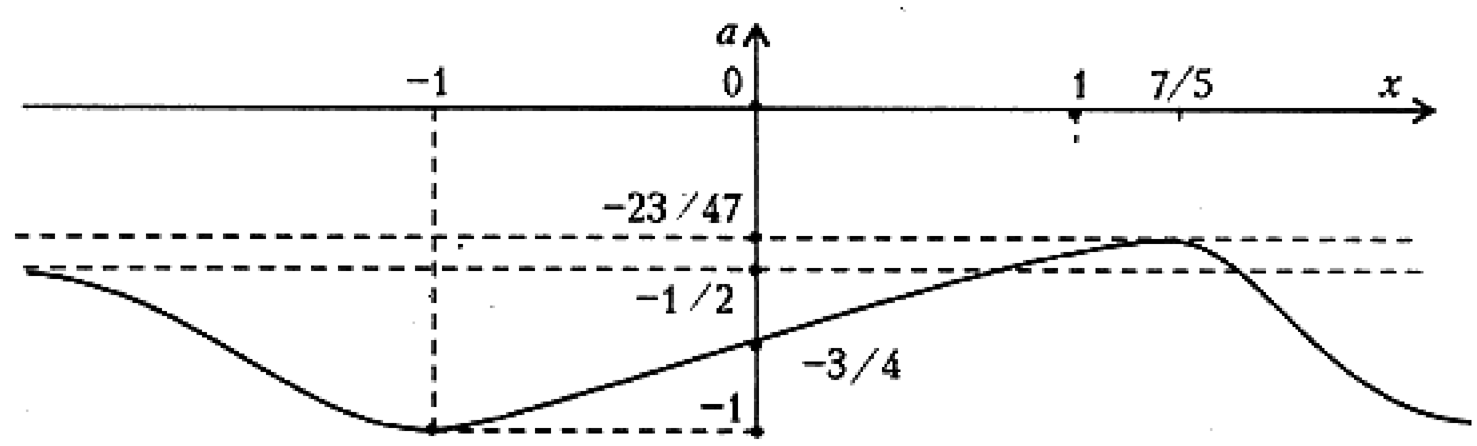

Рис. 6

Решение. Область опеделения уравнения задается двойным неравенством $0 \le x \le 1$. Сведем решение уравнения к решению системы уравнений. Для этого положим $u = \sqrt{x}$, $v = a - \sqrt{x}$; тогда $1 - x^2 = 1 - u^4$, $\left(a - \sqrt{x}\right)^2 = v^2$ и, кроме того, $0 \le u \le 1$. Для нахождения u и v, таким образом, получаем систему

$$\begin{cases} u + v = a, \\ u^4 + v^4 = 1, \\ 0 \le u \le 1. \end{cases}$$

Так как

$$u^4 + v^4 = \left(u^2 + v^2\right)^2 - 2u^2v^2 =$$

$$= \left((u+v)^2 - 2uv\right)^2 - 2(uv)^2,$$

то эта система равносильна следующей:

$$\begin{cases} u + v = a, \\ 2(uv)^2 - 4a^2(uv) + a^4 - 1 = 0, \\ 0 \le u \le 1. \end{cases} \qquad (2)$$

Квадратное уравнение $2t^2 - 4a^2t + a^4 - 1 = 0$ при любом значении a имеет два корня (возможно совпадающих):

$$t_1 = a^2 + \frac{1}{2}\sqrt{2a^4 + 2},\ t_2 = a^2 - \frac{1}{2}\sqrt{2a^4 + 2}.$$

Поэтому система (2) равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} u + v = a, \\ uv = t_1, \\ 0 \le u \le 1, \end{cases} \quad \begin{cases} u + v = a, \\ uv = t_2, \\ 0 \le u \le 1. \end{cases} \qquad (3)$$

Первая система этой совокупности решений не имеет, так как дискриминант квадратного трехчлена $z^2 - az + t_1$, корнями которого должны быть u и v, равен $a^2 - 4t_1 = -3a^2 - 2\sqrt{2a^4 + 2}$ и при любом значении a является отрицательным числом.

Переходя теперь ко второй системе совокупности (3), рассмотрим квадратный трехчлен $p(z) = z^2 - az + t_2$. Система имеет решения тогда и только тогда, когда квадратный трехчлен $p(z)$ имеет по крайней мере один корень на промежутке $0 \le z \le 1$. Уравнение имеет корни только в том случае, если

$$a^2 - 4t_2 = -3a^2 + 2\sqrt{2a^4 + 2} \ge 0.$$

Решая это неравенство, найдем, что $a^2 \le 8$, т.е. $|a| \le 2\sqrt{2}$.

Отсюда уже можно сделать вывод, что если $|a| > 2\sqrt{2}$, то уравнение (1) решений не имеет.

Уравнение

$$p(z) = z^2 - az + t_2 = 0$$

имеет по крайней мере один корень, который принадлежит промежутку $0 \le z \le 1$, только тогда, когда a удовлетворяет совокупности, состоящей из двух систем (рис.7,*а*,*б*)

$$\begin{cases} |a| \le 2\sqrt{2}, \\ p(0) \ge 0, \\ p(1) \ge 0, \\ 0 \le a/2 \le 1, \end{cases} \quad \begin{cases} |a| \le 2\sqrt{2}, \\ p(0)p(1) \le 0, \end{cases}$$

т.е. совокупности

$$\begin{cases} |a| \le 2\sqrt{2}, \\ t_2 \ge 0, \\ 1 - a + t_2 \ge 0, \\ 0 \le a/2 \le 1, \end{cases} \quad \begin{cases} |a| \le 2\sqrt{2}, \\ t_2(1 - a + t_2) \le 0. \end{cases} \qquad (4)$$

(Отметим, что условие $0 \le a/2 \le 1$ означает, что абсцисса вершины параболы $p(z)$ принадлежит отрезку $0 \le z \le 1$.) Первая из систем (4) является необходимым и достаточным условием того, что уравнение $p(z) = 0$ имеет два корня и они оба принадлежат промежутку $0 \le z \le 1$, а вторая система — необходимым и достаточным условием того, что уравнение $p(z) = 0$ имеет корни и ровно один из них принадлежит указанному промежутку.

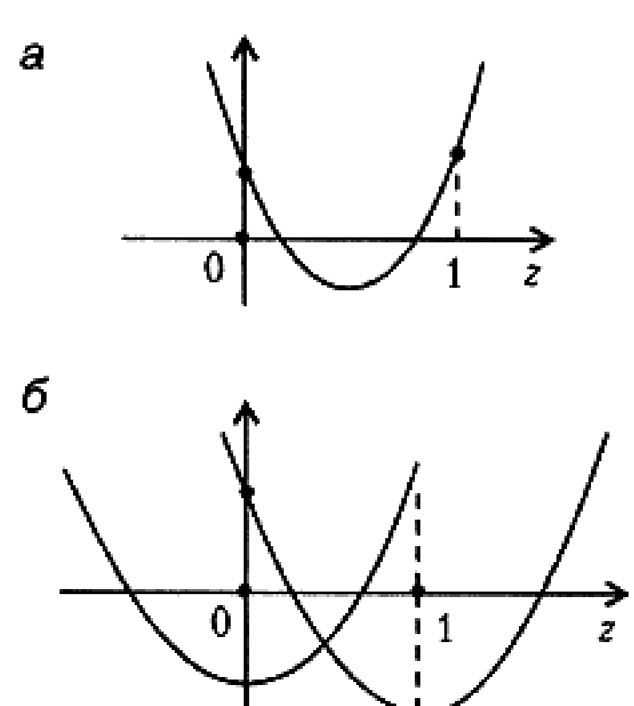

Рис. 7