Так как

$$-a>-a\frac{a-1}{a+1}\Leftrightarrow\frac{a}{a+1}<0,$$

то

$$(2б)\Leftrightarrow\begin{cases}-1<a<0,\\ -a\frac{a-1}{a+1}\le x<-a\end{cases}$$

и, следовательно, для системы (2б) получаем:

если $-1<a<0$, то $-a\frac{a-1}{a+1}\le x<-a$;

если $a\ge 0$, то решений нет.

Для решения системы (2в) отметим, что при $a+1<0$ выполняется неравенство $-a<-a\frac{a-1}{a+1}$ (см. выше). Поэтому

$$(2в)\Leftrightarrow\begin{cases}a+1<0,\\ x<-a\end{cases}$$

и, тем самым, для системы (2в) имеем следующий ответ:

если $a<-1$, то $x<-a$.

Объединяя полученные результаты вместе, для системы (2) получим такой ответ:

если $a\le -1$, то $x<-a$;

если $-1<a<0$, то $-a\frac{a-1}{a+1}\le x<-a$;

если $a\ge 0$, то решений нет.

Аналогично решается система (3); читателю предлагается провести необходимые рассуждения самостоятельно, рассмотрев соответствующие ей системы (3а), (3б), (3в). Приведем здесь полный ответ к неравенству (1):

если $a<-1$, то $x<-a$ или $x\ge -a\frac{a-1}{a+1}$;

если $a=-1$, то $x<1$;

если $-1<a<0$, то $-a\frac{a-1}{a+1}\le x<a$;

если $a=0$, то решений нет;

если $a>0$, то $-a<x\le -a\frac{a-1}{a+1}$.

Приведенное решение основано на довольно разветвленной (хотя и простой) логической схеме, которая условно показана на рисунке 2; в ней знак ↔ означает, что решение равносильно разбору двух (аналогично, трех, четырех, ...) случаев, в логическом отношении связанных между собой союзом «или». Кроме того, отметим, что при решении задачи, по существу, был использован метод интервалов (для переменных x и a), являющийся удобным способом решения разнообразных задач.

В основе другого решения могут быть использованы графические представления (см. рис.3, на котором отмечены все области, координаты точек $(x;a)$ которых удовлетворяют неравенству (1)). Подчеркнем, однако, что обоснование этого рисунка потребует практически столько же аналитической работы, как и в приведенном решении. Отметим также, что рисунок 3, сделанный эскизно правильно и даже без необходимых обоснований, служит прекрасным инструментом (не только в этой задаче) для качественной проверки структуры полученного ответа и в поиске наиболее простой логической схемы аналитического решения.

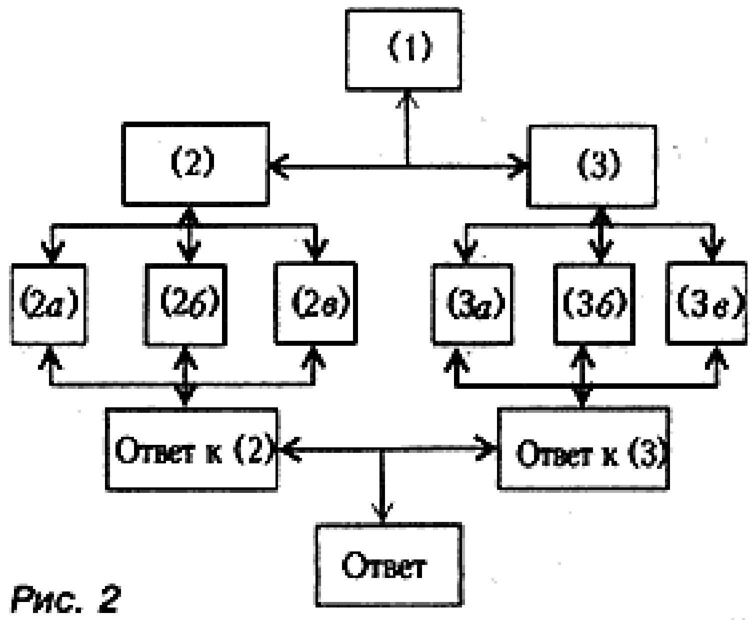

Рис. 2

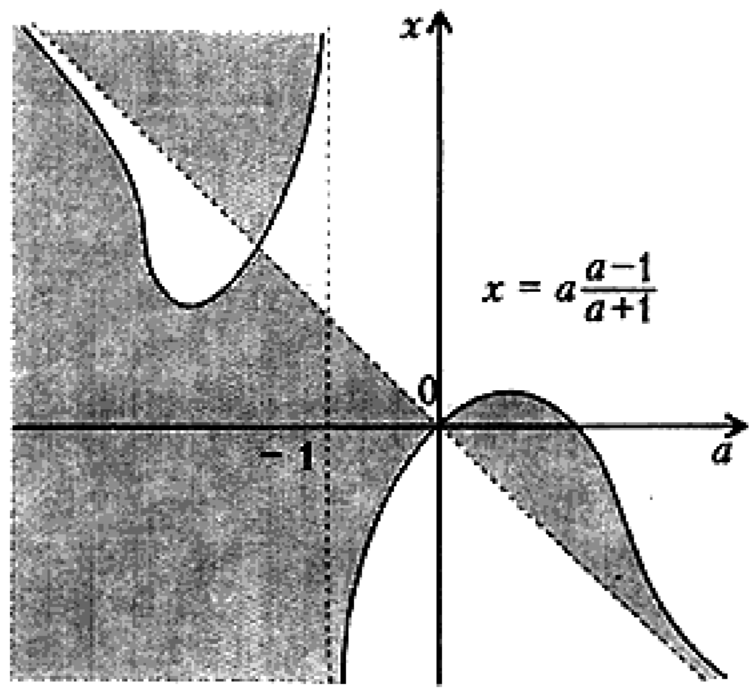

Рис. 3

Расположение корней квадратного трехчлена

Многие задачи с параметрами сводятся к исследованию квадратичной функции и изучению расположения корней квадратного трехчлена в зависимости от его коэффициентов. Эта тема представляет и самостоятельный интерес; мы ограничимся здесь только двумя примерами.

Пример 10. *Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение*

$$(3a+2)x^2+(a-1)x+4a+3=0$$

имеет корни. Исследуйте расположение этих корней на оси абсцисс по отношению к точкам −1 и +1.

Решение. Если $3a+2=0$, то уравнение принимает вид $\left(-\frac{2}{3}-1\right)x-\frac{8}{3}+3=0$ и, тем самым, имеет единственный корень $x=1/5$.

Пусть $a\ne-\frac{2}{3}$. Тогда квадратный трехчлен $p(x)=(3a+2)x^2+(a-1)x+4a+3$ имеет корни x_1 и x_2, $x_1\le x_2$, только в том случае, когда

$$(a-1)^2-4(3a+2)(4a+3)\ge 0;$$

отсюда находим, что $-1\le a<-\frac{2}{3}$ или $-\frac{2}{3}<a\le-\frac{23}{47}$.

При $a=-1$ получаем $x_1=x_2=-1$, а при $a=-\frac{23}{47}$ имеем $x_1=x_2=7/5$.

Теперь рассмотрим отдельно два случая.

1) Пусть $-1<a<-2/3$. Так как

$$p(1)=3a+2+a-1+4a+3=4(2a+1)$$

и

$$p(-1)=3a+2-a+1+4a+3=6(a+1),$$

то в рассматриваемом случае, очевидно, имеем

$$p(-1)>0,\ p(+1)<0.$$

Ветви параболы $y=p(x)$ направлены вниз ($2a+3<0$), значение $p(-1)$ положительно, а значение $p(+1)$ отрицательно; поэтому (рис.4) при $-1<a<-\frac{2}{3}$ имеем $x_1<-1<x_2<+1$.

2) Пусть $-\frac{2}{3}<a<-\frac{23}{47}$. При таких значениях a имеем

$$p(-1)=6(a+1)>6\left(-\frac{2}{3}+1\right)=2>0.$$

Выясним теперь, какой знак имеет значение $p(1)=4(2a+1)$ в рассматриваемом промежутке изменения a. Так как

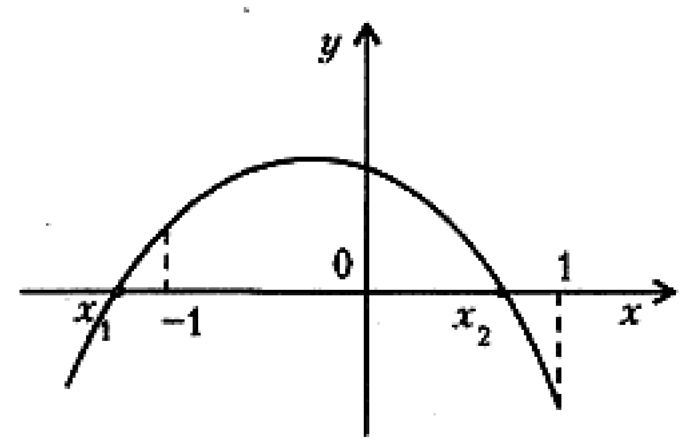

Рис. 4

$2a+1\ge 0$ при $a\ge-\frac{1}{2}$ и $-\frac{2}{3}<-\frac{1}{2}<-\frac{23}{47}$, то

$$p(1)<0 \text{ при } -\frac{2}{3}<a<-\frac{1}{2}$$

и

$$p(1)>0 \text{ при } -\frac{1}{2}<a<-\frac{23}{47}.$$

Кроме того, $p(1)=0$ при $a=-\frac{1}{2}$; в этом случае, как легко убедиться, $x_1=1$ и $x_2=2$. Таким образом (рис.5,а,б), если $-\frac{2}{3}<a<-\frac{1}{2}$, то $-1<x_1<1<x_2$; если