Замена переменных

Естественно, при решении задач с параметрами используются все известные методы решения алгебраических задач: замена переменной, сведение задачи к решению систем уравнений и неравенств и другие.

Пример 5. *Решите уравнение*

$$(x-a-1)(x-a-2)\times$$
$$\times(x-a-4)(x-a-5)=-2.$$

Решение. Используем так называемый метод симметризации, в основе которого (в данной задаче) лежит тот факт, что на оси абсцисс множество из четырех точек $a+1$, $a+2$, $a+4$, $a+5$ симметрично относительно точки $a+3$. Выполним замену переменных

$$y=\frac{1}{4}(x-a-1+x-a-2+x-$$
$$-a-4+x-a-5)=x-a-3,$$

в результате чего приходим к уравнению

$$(y+2)(y+1)(y-1)(y-2)=-2,$$

или

$$y^4-5y^2+6=0.$$

Поэтому данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$(x-a-3)^2=2,\ (x-a-3)^2=3,$$

из которых находим четыре корня:

$$a+3+\sqrt{2},\ a+3-\sqrt{2},\ a+3+\sqrt{3},\ a+3-\sqrt{3}.$$

Пример 6. *При каждом значении a решите неравенство*

$$x^3+\sqrt{a}x^2\le 2a\sqrt{a}.$$

Решение. Область определения задается неравенством $a\ge 0$.

При $a=0$, очевидно, имеем $x\le 0$. Чтобы решить это неравенство при $a>0$, заметим, что, разделив обе части ($a>0$) неравенства на $a\sqrt{a}=\left(\sqrt{a}\right)^3$ и положив $y=x/\sqrt{a}$, получим неравенство

$$y^3+y^2-2\le 0.$$

Так как

$$y^3+y^2-2=(y-1)\left(y^2+2y+2\right)$$

и

$$y^2+2y+2=(y+1)^2+1>0,$$

находим, что $y\le 1$.

Итак, решений нет при $a<0$,

$$x\le\sqrt{a}\ \text{при}\ a\ge 0.$$

Пример 7. *Решите уравнение*

$$\sqrt[3]{8a+x}+\sqrt[3]{8a-x}=\sqrt[3]{a}.$$

Решение. Область определеия уравнения состоит из всех действительных чисел как для x, так и для a.

Если $a=0$, то уравнению удовлетворяет любое $x\in\boldsymbol{R}$.

При $a\ne 0$, разделив обе части уравнения на $\sqrt[3]{a}$ и положив $u=\sqrt[3]{8+(x/a)}$, $v=\sqrt[3]{8-(x/a)}$, получим, что $u+v=1$. Кроме того, $u^3+v^3=16$, так что для нахождения u и v имеем систему уравнений

$$\begin{cases}u+v=1,\\u^3+v^3=16,\end{cases}$$

решая которую (например, методом подстановки) получим для u два возможных значения:

$$u_1=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{21}\right),\ u_2=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{21}\right).$$

Таким образом, при $a\ne 0$ данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\sqrt[3]{8+(x/a)}=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{21}\right),$$

$$\sqrt[3]{8+(x/a)}=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{21}\right),$$

откуда $x=\pm 3a\sqrt{21}$.

Ответ:

если $a=0$, то $x=t$, где $t\in\boldsymbol{R}$;

если $a\ne 0$, то $x_1=3a\sqrt{21}$, $x_2=-3a\sqrt{21}$.

Равносильность

При решении неравенств с параметрами необходимо особенно тщательно следить, чтобы в ходе этих преобразований не терялись решения и не появлялись посторонние решения.

Пример 8. *Для каждого значения a решите неравенство*

$$a+\frac{4a^2}{|x-2a|}\ge 0.$$

Решение. Область определения неравенства задается соотношением $x\ne 2a$. При $a\ge 0$, очевидно, решением неравенства является любое действительное число $x\ne 2a$.

Если $a<0$, то данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}a<0,\\1+\dfrac{4a}{|x-2a|}\le 0,\\x\ne 2a,\end{cases}$$

которая, так как $|x-2a|>0$ при $x\ne 2a$, в свою очередь, равносильна системе

$$\begin{cases}a<0,\\x\ne 2a,\\|x-2a|<-4a.\end{cases}$$

Из неравенства $|x-2a|<-4a$ находим, что $6a<x<-2a$. Таким образом,

если $a\ge 0$, то $x=t$, где t любое число и $t\ne 2a$;

если $a<0$, то $3a<x<-a$.

При решении этого неравенства, конечно, было бы очень грубой и непростительной ошибкой бездумно сократить на a без учета знака переменой a.

Следующий пример на первый взгляд не представляет ничего особенного, но при его решении надо быть предельно внимательным и осторожным.

Пример 9. *Для каждого значения a решите неравенство*

$$\frac{a-x}{a+x}\ge a. \qquad (1)$$

Решение. Приводя к общему знаменателю, получим неравенство

$$\frac{(a+1)x+a(a-1)}{a+x}\le 0,$$

которое равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases}(a+1)x+a(a-1)\ge 0,\\a+x<0,\end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases}(a+1)x+a(a-1)\le 0,\\a+x>0.\end{cases} \qquad (3)$$

Приведем подробное решение только системы (2); она, в свою очередь, равносильна совокупности, состоящей из трех систем:

$$\begin{cases}a+1=0,\\a(a-1)\ge 0,\\a+x<0,\end{cases} \qquad (2а)$$

$$\begin{cases}a+1>0,\\x\ge -a\dfrac{a-1}{a+1},\\x<-a,\end{cases} \qquad (2б)$$

$$\begin{cases}a+1<0,\\x\le -a\dfrac{a-1}{a+1},\\x<-a.\end{cases} \qquad (2в)$$

Из (2а) находим, что если $a=-1$, то система (2) имеет решение: $x<1$. Кроме того,

$$(2б)\Leftrightarrow\begin{cases}a+1>0,\\-a>-a\dfrac{a-1}{a+1},\\-a\dfrac{a-1}{a+1}\le x<-a.\end{cases}$$