Задачи с параметром

В.ВАВИЛОВ

ЗАДАЧИ с параметром весьма разнообразны как по содержанию и формулировкам, так и по методам их решения.

Наиболее существенной частью решения задачи с параметром часто является переход к более простой равносильной ей (т.е. имеющей то же множество решений) задаче.

В этой статье мы разберем несколько примеров таких задач.

Помогает область определения

Каждое уравнение, неравенство, система и т.д. имеют свою область определения, а анализ условий, ее определяющих, как правило, является необходимой (а часто и значительно упрощающей) частью решения задачи.

Пример 1. *При каждом значении a решите уравнение*

$$\sqrt{xa-2}+\sqrt{2-ax}=x^2-5x+6.$$

Решение. Условия, определяющие возможные значения x и a, можно записать в виде системы

$$\begin{cases} xa-2\ge 0, \\ 2-ax\ge 0; \end{cases}$$

поэтому $ax = 2$. Таким образом, исходное уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} x^2-5x+6=0, \\ ax=2. \end{cases}$$

Отсюда:

если $a = 2/3$, то $x = 3$;

если $a = 1$, то $x = 2$;

если $a \ne 0$ и $a \ne 2/3$, то решений нет.

Пример 2. *При каждом значении a решите неравенство*

$$\log_{a-x}(x-a-1)\ge -1.$$

Решение. Область определения данного неравенства задается условиями $x - a - 1 > 0$, $a - x > 0$, $a - x \ne 1$. Однако неравенства $x - a - 1 > 0$ и $a - x > 0$ не имеют общих решений. Значит, область определения неравенства не содержит никаких пар чисел x и a, а поэтому неравенство не имеет решений.

Пример 3. *При каждом значении a решите систему неравенств*

$$\begin{cases} \log_{2-x}(2-a)>0, \\ \log_{4-a}(2x-2)>0. \end{cases}$$

Решение. Область определения данной системы задается следующими условиями: $2 - x > 0$, $2x - 2 > 0$, $2 - x \ne 1$, $4 - a > 0$, $2 - a > 0$, $4 - a = 1$.

Отсюда находим, что

$$1 < x < 2 \text{ и } a < 2.$$

При таких ограничениях на значения x и a для оснований логарифмов исходной системы имеем

$$0 < 2 - x < 1 \text{ и } 4 - a > 2.$$

Таким образом, данная система равносильна системе

$$\begin{cases} 1<x<2, \\ a<2, \\ 0<2-a<1, \\ 2x-2>1, \end{cases}$$

которая легко решается и дает следующий ответ:

если $1 < a < 2$, то $3/2 < x < 2$;

при других значениях a решений нет.

В задачах с неизвестным x и параметром a под областью определения понимается множество всех упорядоченных пар чисел $(x; a)$, каждая из которых такова, что после подстановки соответствующих значений x и a во все входящие в задачу соотношения они будут определены. Поэтому область определения задачи с одним параметром — это некоторое множество на координатной плоскости Oxa; на рисунке 1, *а*, *б* показаны области, отвечающие соответственно областям определения, полученным в примерах 1 и 3. Возможности, связанные с такой интерпретацией, позволяют использовать графические соображения при решении задач с параметром.

Анализ условий, задающих область определения, является, как правило, обязательным при решении задачи. Однако при этом совершенно не обязательно точное ее нахождение (трудности поиска области определения, и даже описания условий, ее задающих, иногда не проще решения задачи).

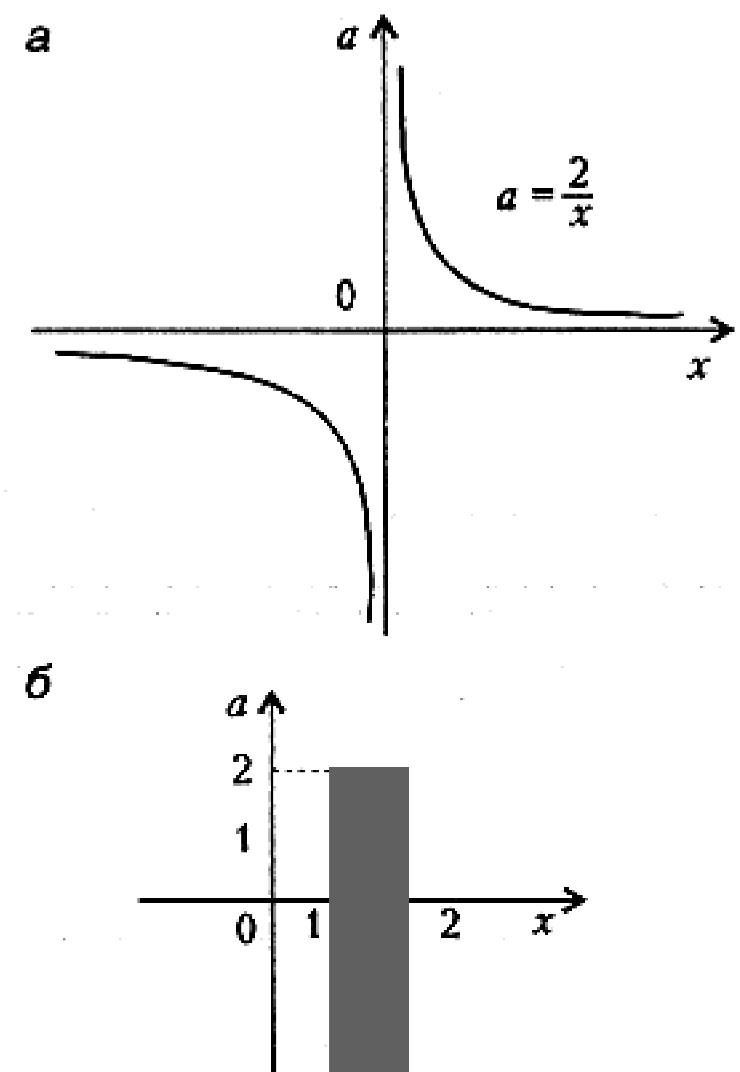

Рис. 1

Пример 4. *Найдите все такие значения a, b и c, при которых уравнение*

$$\sqrt{x+a\sqrt{x}+b}+\sqrt{x}=c$$

имеет бесконечно много решений.

Решение. Предварительный поиск области определения привел бы к довольно сложному исследованию относительно двух параметров. Поэтому мы поступим по-другому. Перенесем $\sqrt{x}$ в правую часть и возведем обе части полученного уравнения в квадрат. После приведения подобных членов получим уравнение

$$(a+2c)\sqrt{x}=c^2-b,$$

являющееся следствием данного уравнения. Это уравнение имеет больше одного решения только при $a + 2c = 0$ и $c^2 - b = 0$. Но тогда исходное уравнение принимает вид

$$\left|\sqrt{x}-c\right|=c-\sqrt{x}.$$

При $c < 0$ это уравнение решений не имеет, при $c = 0$ оно имеет единственное решение $x = 0$, а при $c > 0$ получим $0\le x\le c^2$.

Итак, данное уравнение имеет бесконечно много решений тогда и только тогда, когда $a = -2c$, $b = c^2$, $c > 0$, и ему удовлетворяют все $x \in \left[0;\ c^2\right]$.