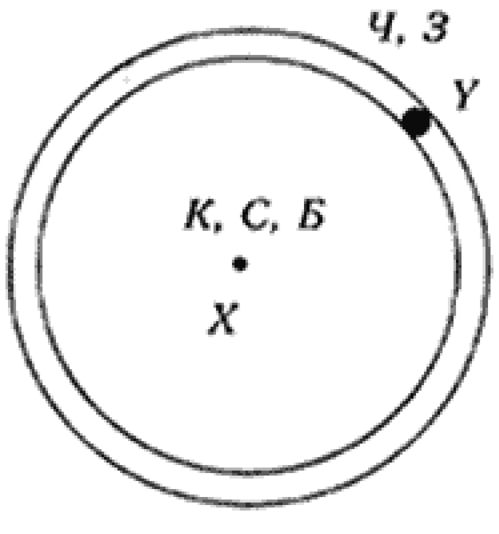
плоскости мелкую сетку из квадратов или, удобнее, правильных шестиугольников со стороной $\varepsilon/4$ и раскрасим каждую шестиугольную клетку в тот цвет, который имел в первоначальной раскраске ее центр. Если мы найдем нужные точки A, B «с точностью до $\varepsilon/2$» на новой карте, то центры A', B' клеток, которым принадлежат A и B, удовлетворяют условию «с точностью до ε»: ведь $|AB - A'B'| \le 2 \cdot \varepsilon/4 \le \varepsilon/2$, так что если $|1 - AB| \le \varepsilon/2$, то $|1 - A'B'| \le \varepsilon$. Мы можем считать при этом, что границы клеток раскрашены в два (а вершины — в три) цвета.

Предположим, что для некоторой раскраски (и некоторого ε) утверждение задачи неверно. Рассмотрим случай, когда некоторые три клетки разного цвета имеют общую вершину X. Пусть эти три цвета — Красный, Синий и Белый. Тогда кольцо радиусом 1 с центром X шириной ε должно быть целиком покрашено в два других цвета — скажем, Черный и Зеленый. Если оно целиком одного цвета — Ч, то, очевидно, на нем есть две точки этого цвета на расстоянии 1. В другом случае на кольце есть точка Y двух цветов: Ч и З; тогда достаточно рассмотреть точки кольца на расстоянии 1 от Y (см. рисунок).



Осталось рассмотреть случай, когда никакие три разных цвета не сходятся вместе. Тогда граница области каждого цвета должна иметь какой-то один определенный цвет — иначе, идя по границе, мы должны были бы наткнуться на тройную точку. Рассмотрим некоторую точку X на границе двух цветов, скажем цветов К и С. Кольцо радиусом 1 (шириной ε) с центром X раскрашено в три цвета Ч, З, Б, и можно считать, что на нем есть точка Y цветов Ч и Б. Тогда кольцо радиусом 1 (шириной ε) и центром Y имеет цвета К, С, З. Рассмотрим Зеленую область, содержащую одну из точек пересечения двух колец. У нее не может быть границы одного цвета: в одном из колец она имеет цвета Ч или Б, в другом — К или С. Получили противоречие, завершающее решение.

Замечание. Известна следующая проблема. Плоскость раскрашена в n цветов. При каком n обязательно найдутся две точки на единичном расстоянии? Нетрудно показать справедливость этого утверждения при $n = 3$. При $n = 7$ относительно легко строится контрпример (конструкция типа пчелиных сот). Недавно был построен контрпример при $n = 6$. Про $n = 4, 5$ ничего не известно. Известно только, что если раскраска, не допускающая единичных расстояний, существует, то некоторые множества точек одного цвета неизмеримы. Если же требовать наличия «почти единичных расстояний», то точный ответ таков: $n = 5$ (это следует из построенного ранее контрпримера).

А.Канель

М1590. *На окружности круглого острова расположены по часовой стрелке четыре порта: 1, 2, 3, 4. На этом острове имеется плоская сеть дорог с односторонним движением, не имеющая кольцевых маршрутов: выехав из какого-либо порта или с развилки дорог, нельзя вернуться в этот же пункт снова. Для любых двух портов i и j обозначим через f_{ij} число различных путей из i и j.*

а) Докажите неравенство $f_{14}f_{23} \ge f_{13}f_{24}$.

б) Предположим, что на окружности острова шесть портов: 1, 2, 3, 4, 5, 6, перечисленных по часовой стрелке. Докажите неравенство

$$f_{16}f_{25}f_{34} + f_{15}f_{24}f_{36} + f_{14}f_{26}f_{35} \ge f_{16}f_{24}f_{35} + f_{15}f_{26}f_{34} + f_{14}f_{25}f_{36}.$$

(«Плоская сеть» означает, что дороги не проходят одна над другой.)

Заметим, что отсутствие циклов (кольцевых маршрутов) позволяет упорядочить все развилки (занумеровать их так, что вдоль каждого пути номера увеличиваются): для любых двух развилок или портов можно при этом сказать, какая идет раньше другой, и проехать из той, что идет позже, в более раннюю нельзя.

Теперь перейдем к решению задачи.

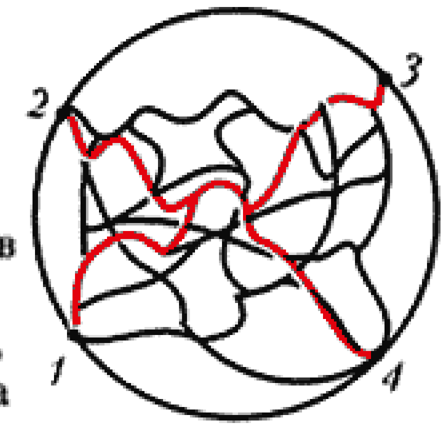


Рис.1

а) Рассмотрим всевозможные пары путей, идущих из порта 1 в порт 3 и из 2 — в 4 (рис.1); коротко будем писать: пары $1 \to 3$, $2 \to 4$. Их число равно $f_{13}f_{24}$. На каждой такой паре есть хоть одна общая точка (развилка или порт). Выберем самую раннюю из них M и «поменяем хвосты» путей, начиная от этой точки M. Так мы получим некоторую пару путей $1 \to 4$, $2 \to 3$. Ясно, что разным парам путей $1 \to 3$, $2 \to 4$ при этом соответствуют разные пары $1 \to 4$, $2 \to 3$, поскольку самая ранняя точка пересечения путей M и «операция замены хвостов» определены однозначно. (Более того, ясно, что любая пара $1 \to 4$, $2 \to 3$, имеющая хоть одну общую точку, будет соответствовать некоторой паре $1 \to 3$, $2 \to 4$.)

Отсюда следует неравенство $f_{14}f_{23} \ge f_{13}f_{24}$, поскольку левая часть — это общее число путей $1 \to 4$, $2 \to 3$ (более точное утверждение: разность $f_{14}f_{23} - f_{13}f_{24}$ равна числу пар путей $1 \to 4$, $2 \to 3$, не имеющих общих точек).

б) Решение аналогично, но описание соответствия требует аккуратности.

Сначала — одно определение. Среди шести отображений множества $\{1, 2, 3\}$ на $\{4, 5, 6\}$ назовем *четными* те, для которых отображение «сохраняет ориентацию треугольника»: $1 \to 4$, $2 \to 5$, $3 \to 6$; $1 \to 5$, $2 \to 6$, $3 \to 4$ и $1 \to 6$, $2 \to 4$, $3 \to 5$, и *нечетными* — остальные (мы представляем себе два правильных треугольника с вершинами 1, 2, 3 и 4, 5, 6, наложенных друг на друга). Если поменять местами образы каких-то двух из номеров $\{1, 2, 3\}$, то четность меняется на противоположную (эта операция соответствует зеркальному отражению треугольников).

Теперь перейдем к решению задачи. Рассмотрим тройку путей $1 \to i$, $2 \to j$, $3 \to k$, где (i, j, k) — некоторая перестановка $\{4, 5, 6\}$. Если какие-то два из них имеют хоть одну общую точку, то выберем самую раннюю из них M и «поменяем хвосты» двух путей, проходящих через эту точку. (Если через M проходят все три пути $1 \to i$, $2 \to j$, $3 \to k$, то установим какое-то четкое пра-