Положив $s = \frac{1-x}{1+x}$, $t = \frac{1+y}{1-y}$, приходим к системе

$$\begin{cases} s = kt^2, \\ \frac{1}{s^2} = lt, \end{cases}$$

где $k = \frac{1-a}{1+a}$, $l = \frac{b+1}{b-1}$, откуда следует, что

$s^5 = \frac{k}{l^2}$, т.е. $s = \sqrt[5]{\frac{k}{l^2}}$, $t = \frac{1}{\sqrt[5]{lk^2}}$.

Исследование решений в зависимости от параметров предоставляем читателю.

А.Егоров

М1588. *Два чеканщика играют в следующую игру. Они по очереди чеканят новые монеты достоинством в целое число рублей каждая. При очередном ходе не разрешается чеканить монету в один рубль, а также монету, которая уже имеется, или которую можно разменять любым количеством (не обязательно разных) монет уже имеющегося достоинства. Проигрывает тот, кто не может отчеканить новую монету.*
а) Докажите, что игра обязательно закончится через конечное число ходов.
б) Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его партнер — и какой должна быть его стратегия?

а) Условимся, что все (малые) буквы ниже означают целые числа. Решение опирается на такой факт из теории чисел:

Лемма 1. *Если a и b — натуральные числа с наибольшим общим делителем d, то любое достаточно большое (скажем, большее ab) число z, кратное d, представляется в виде*

$$z = ax + by, \qquad (1)$$

где $x \ge 0$ и $y \ge 0$.

Очевидно, для доказательства достаточно рассмотреть лишь случай $d = 1$, т.е. взаимно простых a и b (от пары a, b можно перейти к паре a/d, b/d). Разными способами — например, с помощью алгоритма Евклида — можно доказать, что представление (1) с некоторыми целыми x, y существует для любого z (собственно говоря, это достаточно доказать лишь для $z = 1$). Далее, все возможные представления z получаются из какого-то одного по формуле $x' = x - tb$, $y' = y + ta$:

$$z = a(x - tb) + b(y + ta) = ax' + by'$$

(где t — любое целое число). Таким образом, существует единственное представление (1), в котором $0 \le x \le b - 1$; будем называть его *основным*. Ясно, что если $z \ge a(b-1)$, то в его основном представлении $y \ge 0$. Тем самым, лемма 1 доказана.

Из нее (по индукции) получается аналогичное утверждение для n натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Лемма 2. *Множество A_n чисел, представимых в виде $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$, где $x_i \ge 0$, содержит все достаточно большие числа, кратные наибольшему общему делителю чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.*

Теперь перейдем непосредственно к задаче а). Пусть последовательно отчеканены монеты $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$; d_n для каждого n — наибольший общий делитель чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$; A_n — соответствующее множество из леммы 2. Ясно, что $d_1 \ge d_2 \ge d_3 \ge \ldots$, причем в этой цепочке каждый делитель $d = d_n$ может повториться лишь конечное число раз (поскольку множество натуральных чисел, делящихся на d и не входящих в A_n, конечно). Это относится и к последнему d, равному 1. Тем самым, игра может продолжаться лишь конечное число ходов.

б) **Ответ:** выигрывает первый чеканщик. (Мы докажем это, не приводя в явном виде всей стратегии.)

Выигрывающий первый ход: 5 (или любое простое $p \ge 5$). Пусть второй назвал число q, взаимно простое с $p = 5$.

Лемма 3. *Наибольшее число m, не представимое в виде $px + qy$ ($x \ge 0$, $y \ge 0$), равно $m = pq - p - q$, причем если $z \le m$ не представимо, то $m - z$ — представимо в таком виде, и обратно.*

В самом деле, если в основном представлении

$$z = px + qy \qquad (2)$$

(где $0 \le x \le q - 1$) коэффициент $y < 0$, то $m - z = p(q - 1 - x) + q(-1 - y)$ — основное представление числа $m - z$ (поскольку $0 \le q - 1 - x \le q - 1$ и $-1 - y \ge 0$); если же в представлении (2) $y \ge 0$, то $-1 - y < 0$. Поскольку 0 — наименьшее представимое, то $m - 0 = pq - p - q$, как и утверждалось в лемме 3, — наибольшее непредставимое.

Попробуем в качестве ответного хода первого чеканщика (после хода q) назвать m. Предположим, что этот ход проигрышный, т.е. у второго есть выигрышная стратегия, начинающаяся ходом z (разумеется, $1 < z < m$, поскольку все числа, большие m, уже запрещены). Тогда тот же ход z мог сделать первый чеканщик вместо хода m, и дальше следовать выигрышной стратегии второго: ведь по лемме 3

$$m - z = px + qy \quad (x \ge 0,\ y \ge 0),$$

$m = z + px + qx$ было бы запрещено после хода z, так что множество запрещенных чисел осталось бы точно таким же, как и после пары ходов m, z.

Это, видимо, одна из красивейших задач, использующих нетривиальную идею «перемены хода», встречающуюся и в реальных позиционных играх (автор — Дирк Шляйхер — замечательный математик и педагог, один из энтузиастов «Турнира городов» в Германии).

Замечания.

1. Лемма 3 осимметрии была предложена А.А.Кирилловым в качестве отдельной задачи «Задачника «Кванта».

2. В нашем решении используется теорема о конечных позиционных играх (почти очевидная): все позиции в такой игре делятся на выигрышные и проигрышные (для начинающего); установить, какова каждая позиция, можно, разбирая игру «с конца».

Н.Васильев, А.Канель

М1589. *Докажите, что, как бы ни раскрасить плоскость в 5 цветов, найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми отличается от 1 не более чем на 0,001.*

Начнем с того, что, поскольку мы должны найти две точки на расстоянии 1 лишь «с точностью до любого ε», мы можем ограничиться лишь раскрасками сравнительно простых «карт». В самом деле, нарисуем на