Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 января 1998 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №5 — 97» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1606» или «Ф1613». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1607, М1608, М1614 предлагались на Санкт-Петербургской математической олимпиаде, задачи М1604 — М1613 — на XXIII Всероссийской математической олимпиаде. Задачи Ф1613 — Ф1617, Ф1613 — Ф1622 предлагались на Соровской олимпиаде по физике 1997 года.

Задачи М1606 — М1615, Ф1613 —Ф1622

М1606. Дан треугольник ABC. Постройте отрезок DE с концами на сторонах AB и BC, параллельный стороне AC и видимый из середины стороны AC под прямым углом.

Р.Травкин, 10 лет

М1607. Корень трехчлена $ax^2 + bx + b$ умножили на корень трехчлена $ax^2 + ax + b$ и получили в произведении 1. Найдите эти корни.

С.Берлов

М1608. На фестиваль военно-морской песни приглашены хоры из 100 стран. Каждый хор должен исполнить три песни и сразу уехать домой. Ознакомившись с текстами песен, организаторы обнаружили, что каждая песня оскорбительна для одной из участвующих стран. Докажите, что они могут назначить порядок выступлений таким образом, чтобы никому не пришлось выслушивать больше трех оскорбительных для его страны песен.

Ф.Назаров

М1609. Пусть $P(x)$ — а) квадратный трехчлен; б) многочлен четной степени с неотрицательными коэффициентами. Докажите, что для любых действительных чисел x и y справедливо неравенство

$$\left(P(xy)\right)^2 \le P\left(x^2\right)\cdot P\left(y^2\right).$$

Е.Малинникова

М1610. Переаттестация Совета Мудрецов происходит так: король выстраивает их в колонну по одному и надевает на голову каждому колпак а) белого или черного; б) белого, синего или красного цвета. Каждый мудрец видит цвета колпаков всех впереди стоящих мудрецов, но не видит цвет своего колпака и цвета колпаков мудрецов, стоящих позади него. Затем мудрецы по одному называют какой-нибудь цвет (каждому разрешается говорить только один раз). После этого король исключает из мудрецов всех, не угадавших цвет своего колпака. Накануне переаттестации все члены Совета договорились между собой и придумали, как минимизировать число исключенных. Скольким из них гарантированно удастся избежать исключения?

К.Кноп

М1611. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая, вторично пересекающая первую окружность в точке C, а вторую — в точке D. Пусть M и N — середины дуг BC и BD, не содержащих точку A, а K — середина отрезка CD. Докажите, что угол MKN прямой. (Можно считать, что точки C и D лежат по разные стороны от точки A.)

Д.Терешин

М1612*. В клетках таблицы $m \times n$ расставлены числа 1, 2, 3, ..., 100 так, что сумма любых двух соседних чисел не превосходит S. Найдите наименьшее возможное значение S. (Числа называются соседними, если они стоят в клетках, имеющих общую сторону.)

Д.Храмцов

М1613. На бесконечной в обе стороны полосе из клеток, пронумерованных целыми числами, лежит несколько камней (возможно, по нескольку в одной клетке). Разрешается выполнять следующие действия:
1) снять по одному камню с клеток $n-1$ и n и положить один камень в клетку $n+1$;