смысл приписать тройкам первого типа вес 1, второго x, третьего y, где $y \le x \le 1$. Выбор этих весов может диктоваться различными соображениями, но оказывается, что степень нелогичности выражается через v_i, n_i, p_i лишь в одном случае. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим две пары турниров:

1)
$$\begin{array}{ccccc} - & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & - & 1 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & - & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 0 & - & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & - \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} - & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & - & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & - & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & - & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & - \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{ccccc} - & 1/2 & 1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & - & 1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & - & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & - & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & - \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} - & 1 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & - & 1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2 & - & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & - & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & - \end{array}$$

В обеих парах числа v_i, n_i, p_i совпадают для всех i. Непосредственно перебрав все тройки и приравняв для каждой пары суммарные нетранзитивности, получим:

$$\begin{cases} 1+9y = 3x+6y, \\ 1+2x+3y = 4x+3y. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $x = 1/2$, $y = 1/6$.

Осталось выяснить, существует ли при таких весах формула, аналогичная (1). Ответ на этот вопрос положительный. Приведем результат:

$$NT = \left(\left(n^3 - n\right) - \sum n(n_i + 2) - 3\sum \left(v_i - p_i\right)^2\right) \Big/ 24. \quad (2)$$

Доказательство. Вновь предположим, что все партии турнира, кроме партии между участниками с номерами 1 и 2, уже сыграны. Пусть v_1, n_1, p_1, v_2, n_2, p_2 — число выигрышей, ничьих и проигрышей каждого из двух игроков без учета партии между ними, а результаты остальных участников в партиях с ними задаются таблицей

$$\begin{array}{cccc} 1/2 & 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 1/2 & x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 0 & x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{array} .$$

где x_{11} — количество участников, у которых и первый и второй игрок выиграли, x_{12} — количество участников, у которых первый игрок выиграл, а второй сыграл вничью и т.д.

Упражнение 3. Выведите соотношение между числами x_{ij}, v_i, n_i, p_i.

Полученные соотношения показывают, что при заданных v_i, n_i, p_i лишь часть x_{ij} можно выбирать произвольно. Например, если известны x_{11}, x_{13}, x_{31}, x_{33}, остальные числа в таблице определяются однозначно.

Упражнение 4. Выразите все x_{ij} через x_{11}, x_{13}, x_{31}, x_{33}.

Теперь можно приступать к доказательству (2). Рассмотрим три возможных исхода последней партии: победа 1, победа 2, ничья.

Упражнение 5. Получите выражения для левой и правой частей формулы (2) в каждом из трех случаев.

Упражнение 6. Используя результаты упражнений 4 и 5, покажите, что разность левой и правой частей (2) во всех трех случаях одна и та же.

Из результатов упражнения 6 следует, что разность левой и правой частей постоянна для всех турниров. Для завершения доказательства можно было бы рассмотреть какой-нибудь конкретный турнир. Но поскольку у нас уже есть формула (1), можно поступить проще.

Упражнение 7. Докажите, что при $n_i = 0$ для всех i (2) переходит в (1).

Из упражнения 7 следует, что для турниров без ничьих формула (2) верна. Следовательно, она верна для всех турниров.

Исследовав формулу (2), можно увидеть, что максимальная нетранзитивность для турнира без ничьих такая же, как для турнира с ничьими. При нечетном n она достигается, если при всех i имеем $n_i = 0$, $v_i = p_i = (n-1)/2$, при четном, если при всех i либо $n_i = 0$, $v_i - p_i = \pm 1$, либо $n_i = 1$, $v_i + p_i + (n-2)/2$. Рассмотренный в начале статьи турнир четырех участников, очевидно, удовлетворяет этим условиям и, следовательно, является максимально нелогичным.

В заключение — несколько слов о «практической» значимости приведенных результатов. Конечно, измерять противоречивость спортивных турниров никому не нужно. Однако есть область прикладной математики, где подобные рассмотренным результаты используются. Это — теория экспертных оценок. Во многих прикладных задачах нередко требуется выбрать наилучший объект из некоторой совокупности, причем выбор является неформализованным и может быть осуществлен только с помощью экспертов. Опыт показывает, что эксперту легче ответить на вопрос, какой из двух объектов является лучшим, чем сравнивать сразу несколько объектов. Поэтому, когда число сравниваемых объектов не очень велико, целесообразно пользоваться так называемым методом парных сравнений, при котором эксперту предъявляются все пары возможных объектов и его ответы заносятся в таблицу типа турнирной. При этом эксперту может разрешаться или не разрешаться объявлять объекты равноценными, что соответствует турнирам без ничьих и с ничьими. Чтобы на основании ответов эксперта можно было сделать обоснованный выбор, необходимо, чтобы они были достаточно логичны. Для проверки логичности и используется формула (1), которую можно найти в большинстве книг по методу парных сравнений. Как правило, при проведении экспертиз опрашиваются несколько экспертов, после чего определяется коллективное мнение. В методе парных сравнений эксперты, у которых число нетранзитивных троек превышает некоторое критическое значение, исключаются из рассмотрения, а мнения остальных учитываются с различными весами (предполагается, что большое число нетранзитивных троек свидетельствует о невысокой компетентности эксперта и, следовательно, его мнение имеет небольшой вес). Применяется ли для сравнений с ничьими формула (2), мне неизвестно. Впрочем, следует отметить ее искусственность, связанную с выбором весов для троек разных типов. Действительно, то, что нетранзитивность тройки второго типа вдвое меньше, чем первого, представляется достаточно разумным, но почему тройка третьего типа должна иметь нетранзитивность $1/6$, остается малопонятным. Если удастся найти доводы в пользу такого веса, ценность формулы (2) значительно возрастет.