Попробуем разобраться в причинах этой противоречивости. Рассмотрим участников турнира с номерами 1, 2, 4 (или 1, 3, 4). Результаты встреч второго участника говорят о том, что он сильнее четвертого, но слабее первого. Тем самым, первый участник должен играть лучше четвертого и, следовательно, выигрывать у него. Поскольку в действительности этого не происходит, рассмотренную тройку участников следует признать нелогичной (в математике обычно такие тройки называются нетранзитивными). Итак, противоречивость нашего турнира вызвана тем, что он содержит две нетранзитивные тройки (две другие тройки, очевидно, являются вполне логичными).

Теперь естественно сделать следующий шаг и определить степень нелогичности турнира как число его нетранзитивных троек. В частности, степень нелогичности рассмотренного турнира равна 2. Однако число различных троек быстро возрастает с ростом числа участников турнира (при n участниках оно равно $n(n-1)(n-2)/6$, поэтому возникает вопрос, существует ли способ вычисления степени нелогичности турнира более простой, чем перебор всех возможных троек. Решением этого вопроса мы сейчас и займемся.

Рассмотрим сначала турнир без ничьих (например, баскетбольный), в котором за победу присуждается 1 очко, а за поражение — 0 очков. В этом случае формула для определения числа нетранзитивных троек хорошо известна:

$$NT = n(n-1)(2n-1)/12 - \Sigma s_i^2/2, \quad (1)$$

где NT — число нетранзитивных троек, n — число участников турнира, s_i — количество очков, набранных i-м участником.

Доказательство. Пусть все партии, кроме партии участников с номерами 1 и 2, сыграны. Очевидно, что результат последней партии влияет на транзитивность только тех троек, в которые входят оба ее участника. Пусть в партиях с остальными участниками 1 и 2 набрали соответственно s_1 и s_2 очков, причем число участников, у которых они оба выиграли, равно x_{11}, число участников, у которых 1 выиграл, а 2 проиграл — x_{12}, 2 выиграл, а 1 проиграл — x_{21}, оба проиграли — x_{22}. Ясно, что выполняются такие соотношения:

$$x_{11} + x_{12} = s_1,$$
$$x_{11} + x_{21} = s_2,$$
$$x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} = n - 2.$$

Эти соотношения показывают, что если s_1 и s_2 известны, то, зная одно из чисел x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, можно определить остальные. В частности, $x_{12} = n - 2 - s_2 - x_{22}$, $x_{21} = n - 2 - s_1 - x_{22}$.

Рассмотрим теперь различные исходы последней партии.

1) *Победа игрока 1*. В этом случае 1 набирает $s_1 + 1$ очко, у 2 остается s_2. Правая часть формулы (1) принимает вид

$$C_1 - (s_1+1)^2/2 - s_2^2/2,$$

где C_1 — полусумма квадратов очков остальных участников, не зависящая от исхода последней партии.

Тройка с участием 1 и 2 будет нетранзитивной тогда и только тогда, когда третий ее участник выигрывает у 1 и проигрывает 2. Поскольку число таких троек равно x_{21}, левую часть формулы можно записать в виде $C_2 + x_{21}$, где C_2 не зависит от исхода партии.

2) *Победа игрока 2*. Рассуждая аналогично, получаем для правой части (1)

$$C_1 - (s_2+1)^2/2 - s_1^2/2,$$

а для левой $C_2 + x_{12}$.

Используя найденные ранее выражения для x_{12}, x_{21}, получаем, что разность левой и правой части в обоих случаях равна

$$C_2 - C_1 + s_1^2/2 + s_2^2/2 + 1/2 + n - 2 - x_{22}.$$

Таким образом, эта разность не зависит от результата произвольной партии, и, значит, одинакова для всех турниров. Рассмотрим теперь турнир, в котором первый участник выиграл у всех остальных, второй — у всех, кроме первого, и т.д. Для этого турнира число нетранзитивных троек равно нулю, а количества очков $s_1 = n-1$, $s_2 = n-2$, ..., $s_n = 0$. Используя формулу суммы квадратов натурального ряда, убеждаемся, что формула (1) для этого турнира верна. Следовательно, она верна для всех турниров.

Упражнение 1. Докажите, что максимальное число нетранзитивных троек равно $(n^3-n)/24$ при нечетном n и $(n^3-4n)/24$ при четном.

Прежде чем переходить к турнирам с ничьими, обратим внимание на одно обстоятельство. Может возникнуть вопрос, почему нелогичность турнира следует измерять именно числом нетранзитивных троек, а не циклов другой длины (циклом длины k называются такие k участников, что первый из них выиграл у второго, второй у третьего, ..., k-й у первого). Аргументировать выбор такой меры можно так: во-первых, нелогичность нетранзитивной тройки представляется более очевидной, чем нелогичность длинного цикла, во-вторых, длинные циклы в определенном смысле порождаются нетранзитивными тройками. Точнее, выполняется следующее утверждение: *если в турнире есть цикл длины k, то найдется не менее чем $k-2$ нетранзитивные тройки.*

Упражнение 2. Докажите это.

Теперь попробуем обобщить формулу (1) на случай турниров с ничьими. Прежде всего заметим, что знать количество очков, набранных каждым участником, явно недостаточно. Действительно, рассмотрим два турнира с $n = 3$ и такими таблицами:

–	1	0		–	1/2	1/2
0	–	1		1/2	–	1/2
1	0	–		1/2	1/2	–

Количества набранных участниками очков в этих турнирах совпадают, но в первой тройке транзитивность нарушена, а во второй — нет.

Поэтому будем считать, что для каждого участника нам известно не только количество набранных очков, но и количество выигрышей, ничьих и поражений, соответственно v_i, n_i, p_i. Разумеется, $v_i + n_i + p_i = n - 1$ для любого i.

Теперь необходимо уточнить понятие степени нелогичности. Действительно, в отличие от турнира без ничьих, в турнире с ничьими возможны три типа нетранзитивных троек, а именно:

–	1	0		–	1	1/2
0	–	1		0	–	1
1	0	–		1/2	0	–

–	1/2	1
1/2	–	1/2
0	1/2	–

Считать вклад всех этих троек в общую нелогичность одинаковым вряд ли разумно. Первая тройка представляется наиболее нетранзитивной, а третья — наименее. Поэтому имеет