Решим относительно параметра

А. ЕГОРОВ

В ЭТОЙ статье пойдет речь об одном приеме, оказывающемся весьма плодотворным при решении задач с параметром. Такие задачи довольно часто встречаются на вступительных экзаменах в вузы, предъявляющие повышенные требования к математической подготовке абитуриентов. Большая часть разбираемых задач предлагалась на конкурсных экзаменах в такие вузы, как МГУ, МАИ, НГУ и др.

Как правило, решая задачу с параметром, мы рассматриваем его как некоторое произвольное, но фиксированное постоянное число и решаем уравнение, неравенство, систему относительно имеющихся неизвестных, учитывая естественно возникающие ограничения на значения параметра.

Однако в целом ряде случаев (например, при решении уравнений) бывает удобно рассматривать параметр как независимую переменную и решать уравнение относительно этой переменной.

Уравнения, квадратные относительно параметра

В следующих задачах требуется решать уравнение третьей и четвертой степени. В нашем распоряжении нет хороших формул для решения таких уравнений, а угадать корень и разложить на множители при наличии параметра не очень просто.

Однако бывает, что эти уравнения оказываются квадратными относительно параметра.

Задача 1. *Решите уравнение*

$$2x^3-(a+2)x^2-ax+a^2=0.$$

Решение. Данное уравнение — квадратное относительно a:

$$a^2-a\left(x^2+x\right)+2x^3-2x^2=0,$$

его дискриминант

$$D=\left(x^2+x\right)^2-8x^3+8x^2=x^2(x-3)^2$$

— полный квадрат. Поэтому

$$a=\frac{x^2+x\pm x(x-3)}{2},$$

так что либо

$$a=x^2-x,$$

либо

$$a=2x,$$

т.е. либо $x=a/2$, либо $x=\left(1\pm\sqrt{1+4a}\right)/2$. Учитывая условия существования корней, получаем

Ответ. $x=a/2$ при $a<-1/4$; $x_1=-1/8$, $x_2=1/2$ при $a=-1/4$; $x_1=a/2$, $x_{2,3}=\left(1\pm\sqrt{1+4a}\right)/2$ при $a>-1/4$, $a\neq 0$, $a\neq 6$; $x_1=0$, $x_2=1$ при $a=0$; $x_1=-2$, $x_2=3$ при $a=6$.

Задача 2. *При каких a уравнение*

$$(x_2-a)^2-6x^2+4x+2a=0$$

имеет три корня?

Решение. Мы снова имеем дело с квадратным относительно a уравнением:

$$a^2-2a\left(x^2-1\right)+x^4-6x^2+4x=0.$$

Вычисляя его дискриминант, получаем

$$\frac{D}{4}=\left(x^2-1\right)^2-\left(x^4-6x^2+4x\right)=(2x-1)^2,$$

поэтому либо

$$x^2-2x-a=0, \qquad (1)$$

либо

$$x^2+2x-2-a=0. \qquad (2)$$

Выясним, при каких a совокупность уравнений (1) и (2) имеет три решения.

Это возможно в трех случаях: одно из уравнений имеет один корень, а другое — два корня, отличных от корней первого уравнения; уравнения (1) и (2) имеют по 2 корня, один из которых — общий для этих двух уравнений.

Первое уравнение имеет один корень, когда

$$\frac{D}{4}=1+a=0,$$

т.е. при $a=-1$. При этом второе уравнение имеет корни $1\pm\sqrt{2}$.

Второе уравнение имеет один корень при $a=-3$, но при этом первое корней не имеет.

Наконец, если уравнения (1) и (2) имеют общий корень, то

$$x^2-2x=x^2+2x-2,$$

т.е. $x=1/2$, при этом $a=-3/4$.

Ответ. При $a=-1$ и $a=-3/4$.

В следующей задаче нет параметра. Однако удачное превращение данного уравнения в уравнение с параметром дает возможность найти решение. Правда, прием используется весьма искусственный — за параметр по существу принимается конкретное число.

Задача 3. *Решите уравнение*

$$x^4-2\sqrt{3}x^2+x+3-\sqrt{3}=0.$$

Решение. Заменив в уравнении $\sqrt{3}$ на a, получим квадратное относительно a уравнение

$$x^4-2ax^2+x+a^2-a=0,$$

т.е.

$$a^2-a\left(2x^2+1\right)+x^4+x=0.$$

Решая его относительно a, получаем

$$a=\frac{2x^2+1\pm(2x-1)}{2},$$

т.е. либо

$$x^2+x=a,$$

либо

$$x^2-x+1=a.$$

Подставляя $a=\sqrt{3}$, решаем полученные уравнения.

Ответ.

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\sqrt{3}}}{2},$$

$$x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2}.$$

Иррациональные уравнения с параметром

Задача 4. *Решите уравнение*

$$\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x.$$

Решение. Избавление от радикалов приведет к уравнению четвертой степени относительно x. Поэтому попробуем решить уравнение относительно a.

Заметим, что $x\geq 0$. Избавляясь от радикалов, приходим к уравнению

$$a^2-a\left(2x^2+1\right)+x^4-x=0,$$

решить которое мы должны при дополнительных ограничениях

$$x\geq 0 \text{ и } x^2\leq a.$$

Решая относительно a квадратное уравнение, получим

$$a=x^2+x+1$$

либо

$$a=x^2-x.$$

Первое из полученных уравнений противоречит ограничениям. Для его неотрицательных корней $x^2>a$ (поскольку $x\ge 0$).

Второе уравнение не имеет корней при $a<-1/4$, а при $-1/4\le a<0$ не имеет корней, удовлетворяющих исходному уравнению. При $a=0$ имеем $x=0$, а при $a>0$ единственным неотрицательным корнем, удовлетворяющим всем условиям, будет

$$x=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

Ответ. $x=0$ при $a=0$; $x=\left(1+\sqrt{1+4a}\right)/2$ при $a>0$; при $a<0$ корней нет.

Задача 5. *Решите уравнение*

$$a^7+x=\sqrt[7]{a-x}.$$

Решение. Перепишем уравнение таким образом:

$$a=\sqrt[7]{\sqrt[7]{a-x}-x}.$$

При фиксированном x рассмотрим функцию

$$f(a)=\sqrt[7]{a-x}.$$

Наше уравнение, как нетрудно видеть, можно записать и так:

$$a=f(f(a)). \qquad (3)$$

При любом фиксированном x функция $y=f(a)$ является возрастающей.

Докажем, что уравнение (3) равносильно уравнению

$$a=f(a).$$

Прежде всего, всякий корень последнего уравнения является корнем уравнения (3); ибо если

$$a=f(a),$$

то

$$f(a)=f(f(a))$$

и, значит,

$$a=f(f(a)).$$

Пусть a_0 — корень уравнения (3), причем $a_0\ne f(a_0)$. Если $a_0>f(a_0)$, из возрастания функции следует, что

$$f(a_0)>f(f(a_0))=a_0,$$

т.е.

$$f(a_0)>a_0,$$

что противоречит нашему предположению.

Аналогично доказывается невозможность неравенства

$$a_0<f(a_0).$$

Итак, поскольку в нашем случае $a=f(a)$, получаем эквивалентное уравнение

$$a=\sqrt[7]{a-x},$$

откуда следует, что

$$x=a-a^7.$$

Ответ. $a-a^7$.

Вот еще одна задача без параметра, при решении которой вводится параметр.

Задача 6. *Решите уравнение*

$$\sqrt{35-2\sqrt{45-2x}}=x-5.$$

Решение. Пусть $y=\sqrt{45-2x}$. Тогда $x=\dfrac{45-y^2}{2}$ и уравнение приводится к виду

$$2\sqrt{35-2y}=35-y^2.$$

Возведение в квадрат приведет к жуткому уравнению четвертой степени.

Положим $35=a$ (решим уравнение относительно 35); тогда

$$2\sqrt{a-2y}=a-y^2;$$

решая относительно a, получаем либо

$$a=y^2+2y,$$

либо

$$a=y^2-2y-4,$$

т.е. два уравнения

$$y^2+2y-35=0,\ y^2-2y-39=0.$$

Первое из уравнений имеет корни -7 и 5, из которых годится только $y=5$. При этом $x=10$.

Квадрат неотрицательного корня второго уравнения больше 35, так что и он не удовлетворяет уравнению.

Ответ. $x=10$.

Системы уравнений

Здесь мы разберем одну задачу, предлагавшуюся на вступительных экзаменах в НГУ.

Задача 7. *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} y+z=(b+c)\left(\dfrac1x+\dfrac1y+\dfrac1z\right),\\ x+z=(a+c)\left(\dfrac1x+\dfrac1y+\dfrac1z\right),\\ x+y=(a+b)\left(\dfrac1x+\dfrac1y+\dfrac1z\right)\end{cases}$$

при $(a+b)(b+c)(a+c)\ne 0$.

Решение. Пусть $u=1/x+1/y+1/z$. Заметим, что $u\ne 0$. В самом деле, если $u=0$, то $x=y=z=0$, что невозможно.

Решим относительно параметров a, b, c систему

$$\begin{cases}(b+c)u=y+z,\\(a+c)u=x+z,\\(a+b)u=x+y.\end{cases}$$

Сложив уравнения системы, получаем

$$(a+b+c)u=x+y+z. \qquad (4)$$

Последовательно вычитая из (4) уравнения системы, имеем

$$\begin{cases}au=x,\\bu=y,\\cu=z.\end{cases} \qquad (5)$$

Если $abc=0$, система не имеет решений с ненулевыми x, y, z. Далее считаем, что $abc\ne 0$.

Из (5) следует, что

$$\frac ux=\frac1a,\ \frac uy=\frac1b,\ \frac uz=\frac1c$$

и

$$u\left(\frac1x+\frac1y+\frac1z\right)=u^2=\frac1a+\frac1b+\frac1c;$$

если

$$\frac1a+\frac1b+\frac1c>0,$$

то

$$u=\pm\sqrt{\frac1a+\frac1b+\frac1c},$$

после чего без труда получаем

Ответ. $(au,\ bu,\ cu)$, где $u=\pm\sqrt{1/a+1/b+1/c}$ при $1/a+1/b+1/c>0$. При других (a,b,c) решений нет.

Задачи, связанные с неравенствами

Сказанное ранее вполне может быть отнесено и к решению неравенств.

Задача 8. *При каждом значении параметра* a, $|a|<2$, *решите данное не-*

равенство

$$x^4+2ax^3+a^2x^2-1\le 0.$$

Решение. Заметим, что $x=0$ является решением при любом a. Рассмотрим левую часть неравенства как квадратный трехчлен относительно a и попробуем выразить его корни через x, т.е. решим относительно a уравнение

$$f(a,x)=a^2x^2+2ax^3+x^4-1=0.$$

Получаем

$$a=\frac{-x^3\pm\sqrt{x^6-x^6+x^2}}{x^2}=\frac{-x^3\pm x}{x^2},$$

т.е.

$$a=-\frac{x^2+1}{x} \text{ или } a=-\frac{x^2-1}{x}.$$

Это дает возможность разложить на множители квадратный трехчлен $f(a,x)$:

$$f(a,x)=x^2\left(a+\frac{x^2+1}{x}\right)\left(a+\frac{x^2-1}{x}\right)=$$

$$=\left(x^2+ax+1\right)\left(x^2+ax-1\right).$$

Осталось решить неравенство

$$\left(x^2+ax+1\right)\left(x^2+ax-1\right)\le 0.$$

Первый множитель положителен при всех x (напомним, что $|a|<2$), так что исходное неравенство эквивалентно неравенству

$$x^2+ax-1\le 0.$$

Находим корни уравнения

$$x^2+ax-1=0,$$

после чего получаем

Ответ.

$$\frac{-a-\sqrt{a^2+4}}{2}\le x\le\frac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}.$$

Мы решили исходное неравенство, ограничив значения параметра условием $|a|<2$, для того чтобы не загромождать решение техническими деталями. Настоятельно рекомендуем читателям решить эту задачу, как и следующую, без ограничений на a, т.е. при всех вообще a.

Задача 9. *Для каждого неотрицательного a решите неравенство*

$$16a^3x^4+8a^2x^2+16x+a+4\ge 0.$$

Решение. При $a=0$ неравенство справедливо при $x\ge -1/4$. Многочлен в левой части — кубический по a и четвертой степени по x. Выполнив замену $y=2ax$ при $a\ne 0$, получаем

$$\frac{y^4}{a}+2y^2+\frac{8y}{a}+a+4\ge 0,$$

или ($a>0$!)

$$a^2+2a\left(y^2+2\right)+y^4+8y\ge 0.$$

Неравенство стало квадратичным относительно a!

Действуем, как при решении предыдущей задачи:

$$a^2+2a\left(y^2+2\right)+y^4+8y=0,$$

имеем

$$a=-\left(y^2+2\right)\pm\sqrt{\left(y^2+2\right)^2-y^4-8y}=$$

$$=-\left(y^2+2\right)\pm(2y-2),$$

т.е.

$$a=-y^2+2y-4$$

либо

$$a=-y^2-2y.$$

Неравенство приводится к виду

$$\left(y^2-2y+a+4\right)\left(y^2+2y+a\right)\ge 0.$$

При $a>0$ первый сомножитель положителен. Осталось решить неравенство

$$y^2+2y+a\ge 0$$

и перейти к переменной x.

Ответ. $[-1/4;+\infty)$ при $a=0$;

$$\left(-\infty;-\frac{\sqrt{1-a}+1}{2a}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{1-a}-1}{2a};+\infty\right)$$

при $0<a<1$; $(-\infty;+\infty)$ при $a\ge 1$.

Задачи, связанные с исследованием функций

Задача 10. *При каких значениях a неравенство*

$$5a-5+\sin^2 x+a(3-\cos x)^3>0$$

выполняется при всех x?

Решение. Перепишем неравенство:

$$a\left(5+(3-\cos x)^3\right)>5-\sin^2 x.$$

Так как коэффициент при a положителен, оно эквивалентно такому:

$$a>\frac{5-\sin^2 x}{5+(3-\cos x)^3}.$$

Правая часть есть дробь, числитель которой максимален при $\sin x=0$, а знаменатель минимален при $\cos x=1$, т.е. при $x=2k\pi$. Подставляя эти значения x, получаем $a>5/13$.

Ответ. $a>5/13$.

Задача 11. *При каких значениях a функция*

$$y=8ax-a\sin 6x-7x-\sin 5x$$

возрастает и не имеет критических точек на всей прямой?

Решение. Мы должны выяснить, при каких a производная данной функции положительна при всех x. Иначе говоря, при каких a неравенство

$$8a-6a\cos 6x-7-5\cos x>0$$

выполняется при всех x. Решая неравенство относительно a, получаем эквивалентное неравенство .

$$a>\frac{7+5\cos 5x}{8-6\cos 6x}.$$

Числитель дроби в правой части принимает максимальное значение, если $\cos 5x=1$, а знаменатель минимален при $\cos 6x=1$. При $x=2\pi k$ и $\cos 5x=1$, и $\cos 6x=1$, так что

$$a>\frac{12}{2}=6.$$

Ответ. $a>6$.

В следующих задачах существенно используются свойства квадратичных функций.

Задача 12. *Найдите все значения x, удовлетворяющие неравенству*

$$(a+2)x^3-(1+2a)x^2-6x+a^2+4a-5>0$$

хотя бы при одном значении $a\in[-2;1]$.

Решение. Левая часть неравенства — кубический многочлен относительно x и квадратный трехчлен относительно a:

$$f(a)=a^2+a\left(x^3-2x^2+4\right)+$$

$$+2x^3-x^2-6x-5.$$

Для того чтобы квадратный трехчлен со старшим коэффициентом 1 был положителен хотя бы при одном значении аргумента, принадлежащем некоторому отрезку, необходимо и достаточно, чтобы его значение хотя бы в одном из концов отрезка было положительно. В самом деле, если функция

$$y=f(t)=t^2+pt+q$$

неположительна на концах отрезка $[\alpha;\beta]$, т.е. $f(\alpha)\le 0$ и $f(\beta)\le 0$, то $f(t)\le 0$ при всех $t\in[\alpha;\beta]$. Если же, скажем, $f(\alpha)>0$, то $f(t)>0$ в точках отрезка, достаточно близких к α. Аналогично, если $f(\beta)>0$, то и $f(t)>0$ в точках, достаточно близких к β.

Итак, искомые значения x удовлетворяют совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} x^2-2x-3>0,\\ x^3-x^2-2x>0,\end{array}\right.$$

решая которую, получаем

Ответ. $(-\infty;-2)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$.

Задача 13. *Укажите все точки плоскости $(x; y)$, через которые не проходит ни одна из кривых семейства*

$$y = p^2 + (4-2p)x - x^2.$$

Решение. Уравнение кривой является квадратным относительно p:

$$p^2 - 2px + 4x - x^2 - y = 0.$$

Если через точку $(x_0; y_0)$ проходит хотя бы одна кривая, то это уравнение имеет корни и, следовательно, дискриминант его — а это функция от x и y — неотрицателен. Искомые же точки удовлетворяют условию $D < 0$.

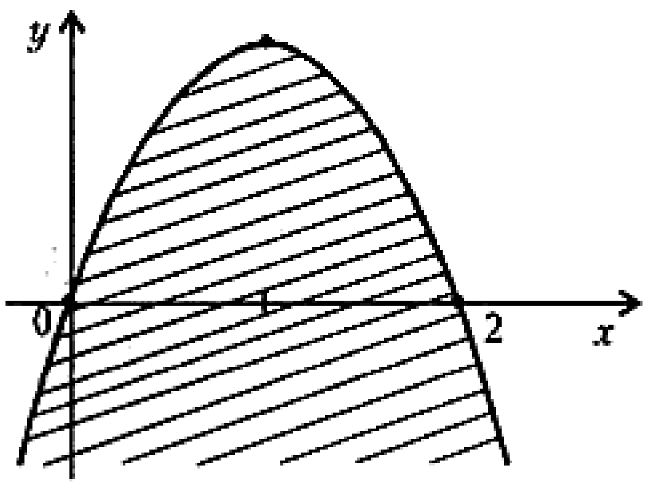

Рис. 1

Вычисляя дискриминант (точнее, $D/4$), получаем неравенство

$$x^2 - 4x + x^2 + y < 0,$$

откуда

$$y < 4x - 2x^2.$$

Итак, все удовлетворяющие условию точки лежат под параболой $y = 4x - 2x^2$ (рис.1).

Исследование уравнений средствами анализа

Сейчас мы обсудим задачи, сравнительно далекие от задач вступительного экзамена. Однако надеемся, что наших читателей методы их решения могут заинтересовать.

Задача 14. *Для каждого значения параметра a выясните, сколько корней имеет уравнение*

$$x^3 - ax + 2 = 0.$$

Решение. Выразим a через x:

$$a = \frac{x^3+2}{x} = x^2 + \frac{2}{x}$$

и исследуем функцию в правой части с помощью производной:

$$\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)' = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2\left(x^3-1\right)}{x^2}.$$

Мы видим, что функция убывает при $x < 0$ и $0 < x < 1$, возрастает при $x \geq 1$ и имеет при $x = 1$ локальный минимум. Построив ее график (рис.2),

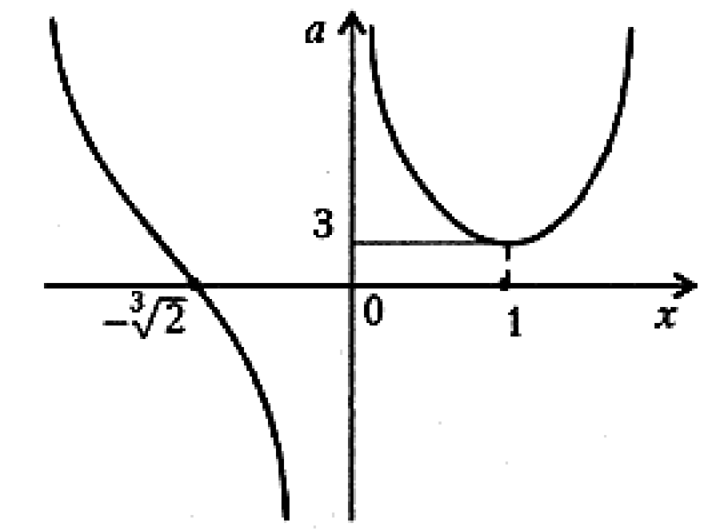

Рис. 2

видим, что при $a < 3$ уравнение имеет один корень, при $a = 3$ — два корня, при $a > 3$ — три корня.

Задача 15. *При каких значениях a имеет корень уравнение*

$$\log_a x = x$$

(иначе говоря, при каких основаниях системы логарифмов существуют числа, равные своему логарифму)?

Решение. Ясно, что $a > 0$, $a \neq 1$ и уравнение эквивалентно такому:

$$\frac{\ln x}{\ln a} = x,$$

или

$$\ln a = \frac{\ln x}{x}.$$

Исследуем функцию, стоящую в правой части уравнения. При $x \to +\infty$ имеем $\frac{\ln x}{x} \to 0$, а так как

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1-\ln x}{x},$$

функция убывает при $1 - \ln x < 0$, т.е. при $x > e$, возрастает при $0 < x < e$, так

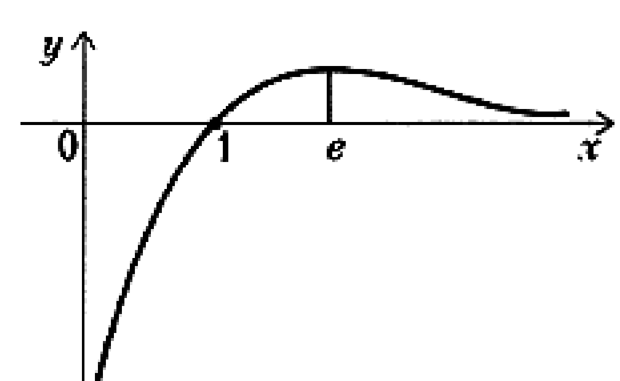

Рис. 3

что график ее имеет вид, показанный на рисунке 3, а уравнение имеет корень при $\ln a \leq 1/e$, т.е. при $1 < a \leq e^{1/e}$ и $0 < a < 1$.

Ответ. $0 < a < 1$, $1 < a \leq e^{1/e}$.

В заключение рекомендуем прорешать следующие задачи.

Упражнения

1. Решите уравнения

а) $ax^3 + \left(a^2-2\right)x^2 - ax - 2 = 0$;

б) $\left(8a^2+1\right)\sin^3 x - \left(4a^2+1\right)\sin x + {}$
$+ 2a\cos^3 x = 0$;

в) $x^3 - \left(\sqrt{2}+1\right)x^2 + 2 = 0$;

г) $\sqrt{a + \sqrt{a-x}} = x$;

д) $\frac{a^3+x^3}{2} = \sqrt[3]{2a-x^3}$.

2. При каких значениях a уравнение

$$\left(2x^2-a\right)^2 - 24x^2 + 16x + 4a = 0$$

имеет а) три корня; б) четыре корня?

3. При каких значениях a уравнение

$$4a^3x^4 + 4a^2x^2 + 32x + a + 8 = 0$$

имеет два корня?

4. Решите системы уравнений

а) $\begin{cases} \frac{a}{x} - \frac{b}{z} + xz = c, \\ \frac{b}{y} - \frac{c}{x} + xy = a, \\ \frac{c}{z} - \frac{a}{y} + yz = b; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = bx + ay - cz, \\ y^2 + z^2 = -ax + cy + bz, \\ z^2 + x^2 = cx - by + az. \end{cases}$

5. Решите неравенство

$$a^3x^4 + 6a^2x^2 - x + 9a + 3 \geq 0$$

для каждого $a \geq 0$.

6. На плоскости $(x; y)$ укажите все точки, через которые проходит хотя бы одна кривая семейства

$$y = p^2 + (2p-1)x + 2x^2.$$

7. Изобразите часть плоскости, покрываемую всевозможными кругами вида

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 \leq 2 + a^2.$$

8. Найдите все значения p, при каждом из которых множество решений неравенства

$$\left(p-x^2\right)(p+x-2) < 0$$

не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \leq 1$.

9. Найдите все значения a, при которых неравенство

$$a(4-\sin x)^4 - 3 + \cos^2 x + a > 0$$

выполняется при всех x.

10. Найдите все значения a, при которых функция

$$y(x) = a\sin 7x + 8ax + \sin 4x - 5$$

убывает и не имеет критических точек ни при каких x.

11. Найдите все значения x, удовлетворяющие неравенству

$$(2-a)x^3 + (1-2a)x^2 - 6x + 5 + 4a - a^2 < 0$$

хотя бы при одном значении $a \in [-1; 2]$.

12. Для каждого значения параметра a определите число корней уравнения

а) $ax^3 - x + 2 = 0$;

б) $(x+1)^4 = ax^3$;

в) $e^x = ax$;

г) $e^x = ax^2$.