Эта статья посвящается памяти прекрасного человека Ли Янкера (1941—1994). Он был одним из лучших учителей математики в США. Познакомившись с фракталами, Ли Янкер стал горячим энтузиастом распространения основ этой науки среди американских учителей. Он считал, что эта тема способна зажечь учителя математики математикой. А учитель, увлеченный своим предметом, способен на многое... В 1992— 1993 годах он организовал для учителей десятки превосходных конференций о фракталах с участием лучших специалистов и популяризаторов. Среди них были и «отец» фракталов Б.Мандельброт, и авторы недавно вышедшей у нас в переводе книги «Красота фракталов», и другие. Их мастерски построенные лекции, сопровождавшиеся демонстрацией удивительных компьютерных фильмов, представляли собой настоящее зрелище. В конце таких лекций потрясенные учителя устраивали овацию... Ли Янкера знали и любили американские учителя математики. Когда стало известно о его тяжелом недуге, Ли получил от них около 2 тысяч открыток с пожеланиями выздоровления... Однако через год, в октябре 1994 года, его не стало.

Игра «Хаос» и фракталы

Н.ДОЛБИЛИН

Новое — хорошо забытое старое

Наука о фракталах, о которых пойдет здесь речь, оформилась в отдельную область математики совсем недавно, где-то в конце 60-х — начале 70-х годов нашего столетия. Отцом этого направления называют математика Бенуа Мандельброта. Однако первые фракталы появились в математике намного раньше, более 100 лет тому назад. К их числу относятся такие удивительные конструкции, как *канторово совершенное множество* (1883), или, например, заметающая целый квадрат *кривая Пеано* (1890), или *ковер Серпинского* (1916), или ажурнейшие *множества Жюлиа* (1918). Эти и другие аналогичные конструкции были в свое время открыты математиками для того, чтобы показать, насколько наивными и хрупкими могут быть наши представления даже о столь знакомых, казалось, объектах, как функция и кривая. Эти, как правило, сложные конструкции производили очень сильное впечатление на математиков своей необычностью, за что были прозваны *математическими монстрами*. По-видимому, первосоздатели этих монстров не всегда могли представить воочию всего изящества их творений. Вряд ли, например, Жюлиа мог испытывать наслаждение от ажурности множеств, носящих сегодня его имя (рис. 1). Визуализация этих сложных объектов стала возможной лишь благодаря компьютеру.

Кстати, так называемая *кривая дракона*, которой была посвящена интересная статья в одном из первых выпусков журнала «Квант» более четверти века назад, также является типичным фракталом, хотя термина «фрактал» в то время еще не было.

Так что же такое фрактал? Общепринятого определения этого понятия не существует. Однако любое из предлагаемых определений фрактала, например определение фрактала по Мандельброту — «множество, хаусдорфова размерность которого превышает его топологическую размерность», — вряд ли сможет удовлетворить читателя. Представить по нему, что такое фрактал, невозможно. Это тот случай, когда, по нашему мнению, нужно начинать знакомство с

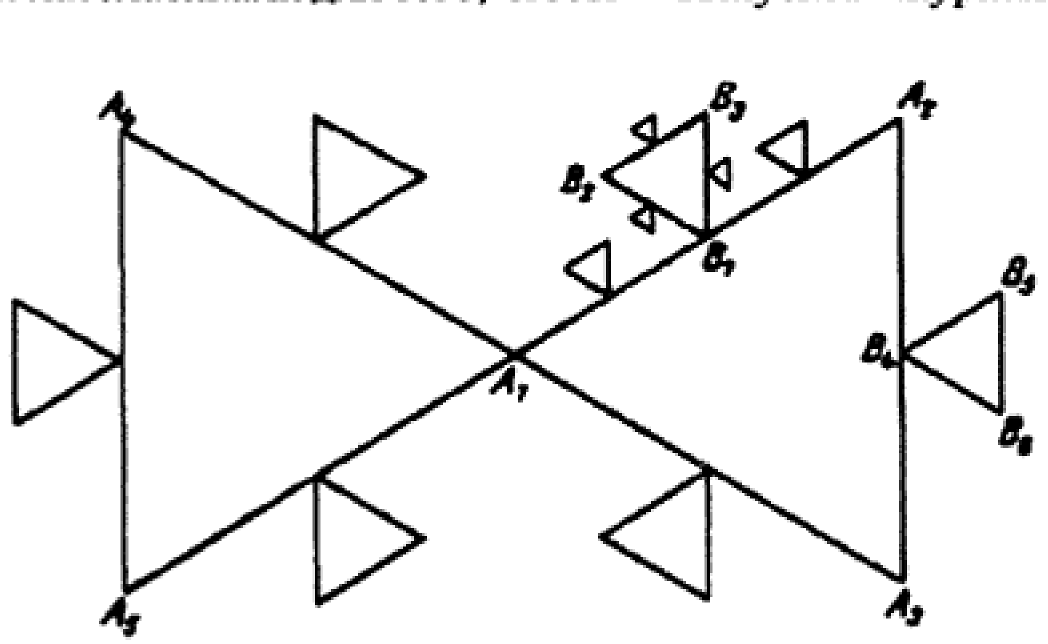

Рис. 1. Слева — докомпьютерная «визуализация» множества Жюлиа (1925 г.); справа — множество Жюлиа, нарисованное компьютером

понятием не с его определения, а с рассмотрения конкретных примеров. Позднее, после приобретения определенного опыта, можно вернуться к определению.

Геометрия — язык природы

Было бы неверно сводить термин «фрактал» к наименованию лишь разновидности математических монстров, которые представляют интерес, пожалуй, только для узкого круга математиков. Б.Мандельброт в книге «Фрактальная геометрия природы» проводит любопытную мысль: евклидова геометрия, которая изучается в школе, сама по себе плохо предназначена для описания форм природных объектов.

В самом деле, нельзя не согласиться с тем, что не так уж много объектов природного происхождения имеют простые формы многоугольника или многогранника, круга или шара, цилиндра или конуса. В силу более-менее понятных причин «повезло» шару (например, форма планет, звезд, ягод и многого другого). Форма конуса имеется у действующих вулканов. Многогранные формы встречаются, пожалуй, только у кристаллов. Если же говорить об объектах искусственного происхождения (здания, мебель, утварь, посуда...), то они, наоборот, как правило, имеют простые геометрические формы — прямоугольник и параллелепипед, круг и шар и т.п., или их несложные композиции, — т.е. те самые формы, которые изучаются в элементарной геометрии.

Мандельброт отмечает, что некоторые из природных форм обладают геометрическим свойством, которое присуще и упомянутым ранее математическим монстрам. Это так называемое свойство *самоподобия* состоит в том, что структура, которую имеет объект на «макроуровне», повторяется в нем и на «микроуровне». Подобный эффект можно наблюдать, если рассматривать кочан цветной капусты «издали» и «вблизи» (рис.2). Мы видим, что один и тот же характер поверхности повторяется на двух различных уровнях рассмотрения. На рисунке 3 представлена имитация береговой линии, сделанная компьютером. Она очень похожа на фотографию морского побережья, сделанную как бы с высоты околоземной орбиты, затем с высоты полета самолета, с высоты птичьего полета... Мы видим как бы различные порции ландшафта в разных масштабах. Но каждый раз бросается в глаза схожесть очертаний на всех этих картинках: Такого рода самоподобие встречается у многих природных форм. Это несколько неожиданно, однако самоподобие может возникать там, где его совершенно не ждут, в чем мы убедимся на примере игры «Хаос».

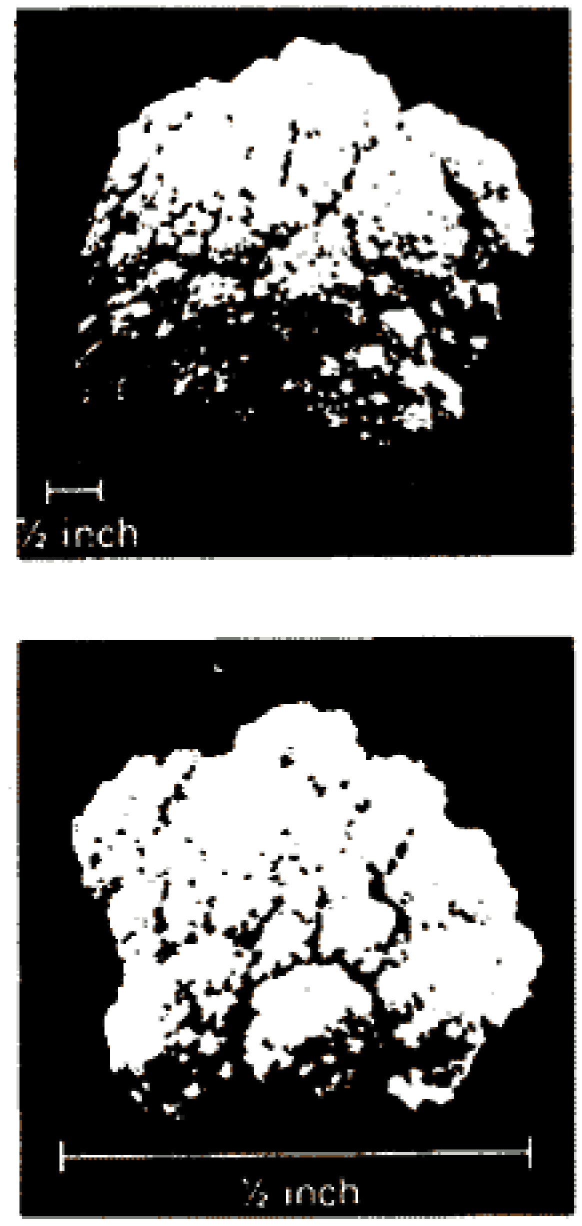

Рис. 2

Случайность оборачивается ... порядком

Игра под названием «Хаос» имеет много вариантов. Рассмотрим один из них. Возьмем на плоскости треугольник A_0, A_1, A_2 и «монету» с *тремя* «сторонами» для случайного выбрасывания одного из трех чисел 0, 1 или 2. Таким датчиком случайных чисел может служить «кость» — кубик с числами 1, 2, ..., 6 на гранях. Тогда остаток выпавшего числа по модулю 3 будет равен 0, 1 или 2.

Итак, начинаем игру. Отметим совершенно *произвольную* начальную точку x_0.

Шаг 1-й. Бросим кость; предположим, выпало число с остатком 0. Соединим тогда точку x_0 с вершиной A_0 треугольника $A_0A_1A_2$ отрезком. Отметим середину отрезка $[x_0, A_0]$ — точку x_1 (рис.4).

Шаг 2-й. Бросим опять кость; допустим, выпало 2. Отметим середину отрезка $[x_1, A_2]$ и обозначим ее через x_2. Нетрудно догадаться, какой шаг будет следующим.

Шаг n-й. Пусть уже имеется точка x_{n-1} и при n-м бросании кости выпадает число α_n, где $\alpha_n = 0,1$ или 2. Тогда соединим точку x_{n-1} с вершиной A_{α_n}, и n-я точка x_n нашей последовательности, по определению, есть середина отрезка $[x_{n-1}, A_{\alpha_n}]$.

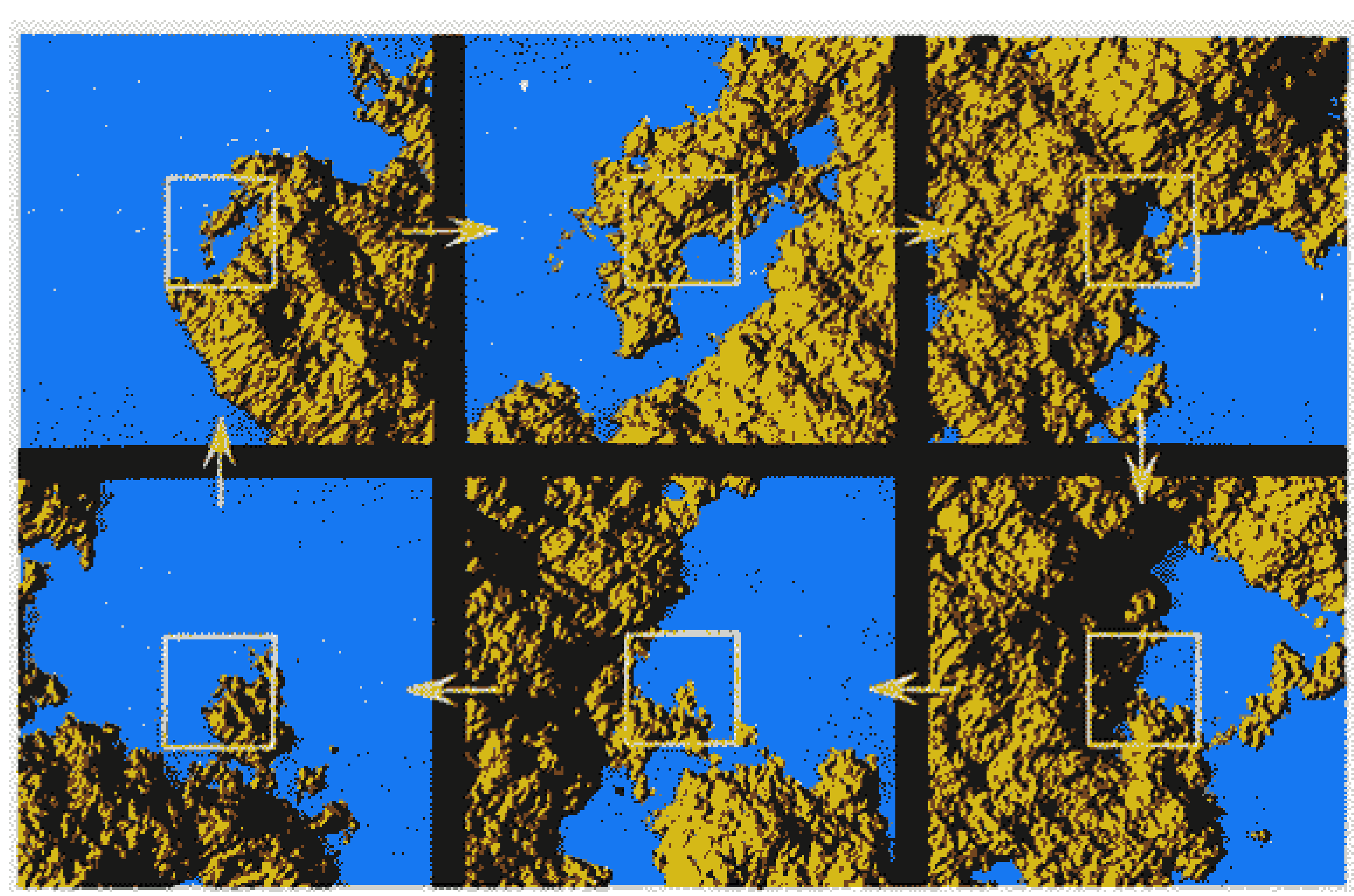

Рис. 3

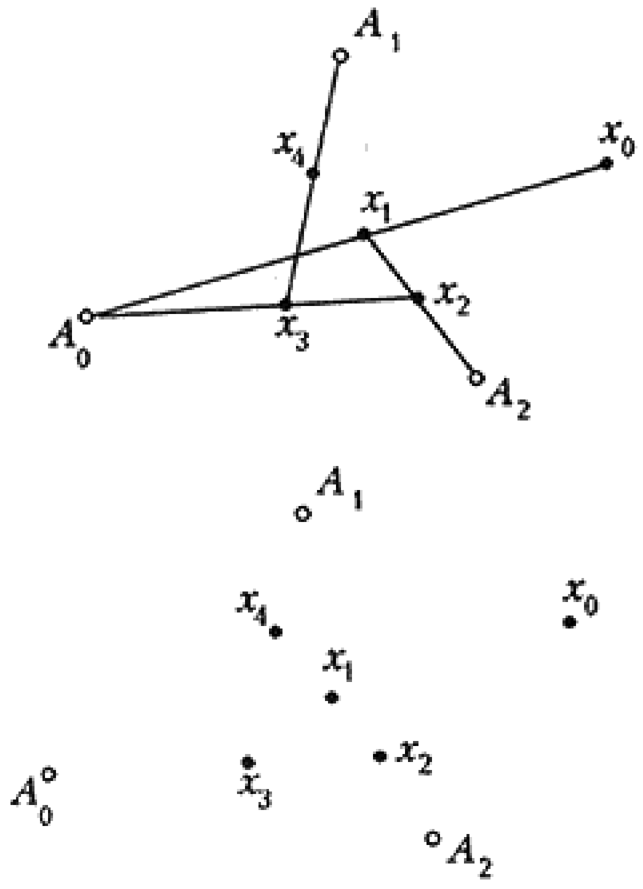

Рис. 4

Действуя таким образом, мы получаем последовательность

$$X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$$

точек на плоскости. От чего она зависит? Разумеется, последовательность X зависит от выбора начальной точки x_0 и, конечно, от той случайной последовательности

$$\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots\}$$

чисел 0,1,2, которые выдаются нам при бросании кости. Как мы видим, здесь слишком много неопределенности: и начальная точка x_0 взята произвольно, и последовательность вершин совершенно случайна. Так что ожидать чего-то определенного от последовательности X не приходится. Выведем на дисплей компьютера первые, скажем, 100 точек последовательности (рис. 5,*а*). Как и ожидалось, ничего интересного. Чтобы убедиться в том, что действительно ничего особенного здесь не происходит, давайте добавим еще, скажем, точек пятьсот, благо выдаются они «не вручную», а компьютером. Опять, как говорится, не на что глаз положить... Хотя минуточку ... что-то новое проступило на рисунке 5,*б*, на котором показаны результаты игры после 500 шагов! Продолжим игру и выведем на дисплей 2000 точек (рис. 5,*в*)... Тот узор, который на рисунке 5,*б* только-только начал проявляться, на рисунке 5,*в* стал гораздо отчетливее. Рисунок 5,*г*, на котором отмечены уже 10000 точек, ничего нового, кроме дополнительной контрастности, не добавляет к рисунку 5,*в*. Последовательность рисунков 5,*а*—*г* напоминает фотографию в процессе проявления, когда сначала проступают какие-то размытые пятна, потом выступают вполне узнаваемые формы, которые в конце концов доводятся до необходимой контрастности.

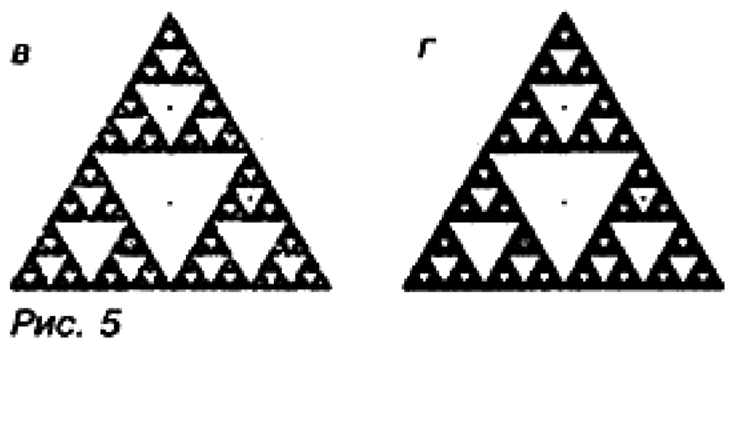

Рис. 5

Фигура на рисунке 5,*г* напоминает геометрическую конструкцию под названием *салфетка Серпинского*.[1] То, что в результате совершенно *случайного* процесса появился столь симметричный узор, — это абсолютно неожиданно. Однако чувствуется, что произошло это совершенно **неслучайно**. Действительно, можно повторять эксперимент опять и опять, беря каждый раз новые начальные точки x_0. Случайные последовательности чисел $\mathcal{A}$ будут, понятно, также разными. Однако при выводе точек последовательности X на дисплей результат будет неизменным: салфетка Серпинского.

Не правда ли, удивительно: последовательности точек X **разные**, случайные, а их «фотографии» выглядят совершенно **одинаково**. Второй, не менее интересный вопрос: как вообще случайность может порождать строгий порядок, присущий салфетке Серпинского? Задача статьи — объяснить этот феномен.

Салфетка Серпинского — что это такое

Определяется салфетка Серпинского T_C при помощи следующей бесконечной процедуры. Возьмем треугольник $A_0A_1A_2$, состоящий из всех его внутренних и граничных точек (рис. 6,*а*), и на *первом этапе* разделим его тремя средними линиями на четыре треугольника, о которых будем говорить, что это треугольники *ранга 1*. Удалим внутренность *центрального* треугольника ранга 1 (рис. 6,*б*). Остаются три треугольника, каждый — вместе с его границей. Они попарно пересекаются между собой, всякий раз по вершине. Обозначим эти треугольники (напомним, ранга 1) через T_0^1, T_1^1 и T_2^1. Верхний индекс означает номер этапа построения, нижний — номер вершины, к которой данный треугольник прилегает.

На *втором этапе* возьмем каждый треугольник T_i^1 ранга 1 и разделим его средними линиями на четыре треугольника, которые назовем *треугольниками ранга 2*. Внутренность центрального треугольника опять выбрасывается, а оставшиеся три замкнутых треугольника обозначаются через T_{ij}^2. Первый нижний индекс i наследуется от треугольника ранга 1, в котором находится данный треугольник ранга 2. Второй индекс j означает, какой из трех треугольников ранга 2, на которые подразбивается i-й треугольник T_i^1 ранга 1, имеется в виду. Числа i и j могут принимать значения 0, 1 или 2. Заметим, что если остающихся треугольников ранга 1 было 3, то остающихся треугольников ранга 2 — уже 9 (рис.6,*в*).

На следующем, *третьем*, этапе берется T_{ij}^2 ранга 2, делится на четыре треугольника, которые объявляются треугольниками ранга 3. Как и прежде, внутренность центрального выбрасывается и оставшиеся три треугольника обозначаются через T_{ijk}^3, где индекс k равен 0,1 или 2 (рис.6,*г*).

Салфетка Серпинского T_C — это множество тех точек исходного треугольника $A_0A_1A_2$, которые не принад-

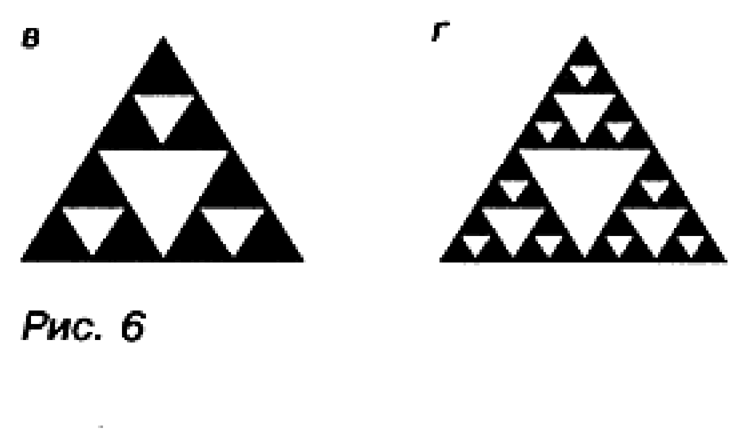

Рис. 6

[1] *В математике хорошо известна конструкция под названием* ковер Серпинского. *Салфетка и ковер Серпинского определяются совершенно аналогично, разница только в том, что салфетка строится на основе треугольника, а ковер — на основе квадрата.*

лежат ни одному из центральных треугольников произвольного ранга, т.е. множество, состоящее из тех точек, которые не удаляются ни на каком из этих этапов.

«Площадь» салфетки Серпинского равна *нулю*. В действительности, о площади салфетки Серпинского говорить в том смысле, в каком говорят в школе о площадях элементарных фигур, нельзя: она слишком «дырява» для того, чтобы иметь площадь в смысле школьного определения.

С другой стороны, если площадь исходного треугольника $A_0A_1A_2$ равна 1, а на первом шаге из него выбрасывается *один* центральный треугольник ранга 1 площади $1/4$, то площадь остатка $3/4$. На втором этапе из каждого оставшегося треугольника ранга 1 выбрасывается центральный треугольник. Это значит, что площадь остающейся после второго этапа части составляет опять $3/4$ площади того, что оставалось после первого этапа. Легко видеть, что после каждого следующего шага остается $3/4$ площади той фигуры, которая возникла на предыдущем. Т.е. после n-го шага площадь оставшейся части равна $(3/4)^n$. И когда мы говорим, что «площадь» салфетки Серпинского равна нулю, мы понимаем следующее: для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такую фигуру, что, с одной стороны, ее площадь не превосходит ε, а с другой стороны, эта фигура содержит салфетку.

Из каких точек состоит салфетка Серпинского? Легко понять, например, что любая точка, лежащая на границе треугольника *любого* ранга, принадлежит салфетке. Действительно, такая точка не принадлежит внутренности *ни одного центрального* треугольника *никакого* ранга, и следовательно, не выбрасывается ни на каком этапе. Т.е. граница треугольника любого ранга целиком входит в салфетку. Но это далеко не все точки, входящие в салфетку. Как же описать все вообще точки из T_{C}?

Точки салфетки Серпинского и их адреса

Пусть x — какая-то точка из T_{C}. По построению салфетки Серпинского, точка x обязана принадлежать хотя бы одному из треугольников ранга 1. Пусть номер этого треугольника есть a_1. Находясь в треугольнике $T^1_{a_1}$, точка x принадлежит хотя бы одному из треугольников ранга 2 (максимум двум), скажем треугольнику $T^2_{a_1a_2}$. На этом пути получаем, что точка x принадлежит бесконечной последовательности треугольников, каждый из которых содержится в предыдущем

$$T^1_{a_1} \supset T^2_{a_1a_2} \supset T^3_{a_1a_2a_3} \supset \ldots \supset T^n_{a_1a_2a_3\ldots a_n} \supset \ldots \qquad (1)$$

Точка x, в силу выбора треугольников, принадлежит *каждому* треугольнику последовательности (1).

Бесконечная последовательность

$$a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots \qquad (2)$$

называется *адресом* $адр(x)$ точки x. Итак, *каждой* точке x салфетки Серпинского можно поставить в соответствие ее адрес $адр(x)$, который является бесконечной последовательностью чисел 0, 1 или 2 (рис. 7).

Здесь возникает три вопроса. *Первый* — а не имеет ли тот же адрес, что и точка $x \in T_{\text{C}}$, какая-либо еще точка салфетки Серпинского? Другими словами, могут ли различные точки салфетки x и y иметь одинаковый адрес: $адр(x) = адр(y)$? Ответ: нет, по данному адресу «проживает» максимум одна точка салфетки.

Далее, последовательность (2) строилась как последовательность индексов треугольников, сходящихся к данной точке $x \in T_{\text{C}}$. Теперь возьмем произвольную последовательность $a_1a_2a_3\ldots a_n\ldots$, состоящую из чисел 0, 1 или 2. *Второй* вопрос: есть ли в T_{C} точка с таким адресом? Ответ: да, есть.

И наконец, *третий* вопрос: не может ли точка x иметь более одного адреса? Ответ здесь не совсем однозначный. Как правило, точки из салфетки Серпинского имеют единственный адрес. Но это правило «подтверждается» исключением: некоторые точки в салфетке имеют два (не более) адреса.

Ответ на первый вопрос имеет простое объяснение. Совпадение адресов у точек, скажем x и x', означает, что точки x и x' обе принадлежат каждому треугольнику последовательности (1). Но так как размеры треугольников уменьшаются на каждом этапе вдвое, то расстояние $|x, x'|$ не может быть отличным от нуля. Следовательно, $x = x'$.

Сложнее установить, почему последовательность (1) вложенных друг в друга замкнутых треугольников содержит хотя бы одну общую точку. В начале курса математического анализа имеется важная лемма о вложенных отрезках.

Лемма о вложенных отрезках. Если $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ — последовательность *замкнутых* отрезков таких, что

1) каждый следующий отрезок δ_{i+1} содержится в предыдущем отрезке δ_i,

2) длины $|\delta_i|$ отрезков стремятся к 0,

то *существует* и *только одна* точка, которая принадлежит одновременно *всем* отрезкам δ_n.

Из леммы о вложенных отрезках можно вывести аналогичную лемму о вложенных треугольниках.

Последовательность (1) *замкнутых* треугольников удовлетворяет следующим условиям:

1) треугольники из (1) последовательно вложены друг в друга и

2) размер треугольника следующего ранга вдвое меньше размера треугольника предыдущего, т.е. размеры треугольников в последовательности (1) стремятся к нулю. По лемме о вложенных треугольниках *существует одна и только одна* точка x, которая принадлежит всем треугольникам последовательности (1).

Так как каждой последовательности $a_1a_2a_3 \ldots a_n \ldots$, состоящей из 0, 1 и 2, соответствует однозначно последовательность треугольников вида (1), по лемме о вложенных треугольниках последовательность имеет единственную общую точку x с адресом $адр(x) = a_1a_2a_3 \ldots a_n \ldots$

Объясним ответ на третий вопрос. Допустим, точка x_0 *не является вершиной* никакого треугольника ранга n ни при каком значении n. Пусть она принадлежит треугольнику $T^n_{a_1\ldots a_n}$ ранга n. Тогда она принадлежит одному и только одному треугольнику $T^{n+1}_{a_1\ldots a_{n+1}}$ следующего ранга. Таким образом, последовательность $a_1\ldots a_n\ldots$ определяется однозначно. Если же точка x является вершиной треугольника $T^n_{a_1\ldots a_{n-1}a_n}$ и не являлась вершиной никаких треугольников предыдущих рангов, то она является вершиной еще одного треугольника ранга n $T^n_{a_1\ldots a_{n-1}a'_n}$. Очевидно, что первый адрес точки x имеет вид $a_1\ldots a_n\ a\ a\ldots$, а второй ее адрес — $a_1\ldots a'_n\ a'a'\ldots$

Рассмотрим для примера вершину A_0. Она принадлежит салфетке Серпинского, так как она не входит ни в один центральный треугольник и не удаляется ни на каком этапе. Вершина A_0 имеет единственный адрес $адр(A_0) = 000\ldots$ Вершина A_1 имеет адрес $адр(A_1) = 111\ldots$

С другой стороны, середина A_{12} стороны A_1A_2 принадлежит одновременно двум последовательностям вложенных треугольников вида (1)

$$T_1^1 \supset T_{12}^2 \supset T_{122}^3 \supset \ldots$$

и

$$T_2^1 \supset T_{21}^2 \supset T_{211}^3 \supset T_{2111}^4 \supset \ldots$$

и поэтому имеет два различных адреса: 1222... и 2111... (см. рис. 7).

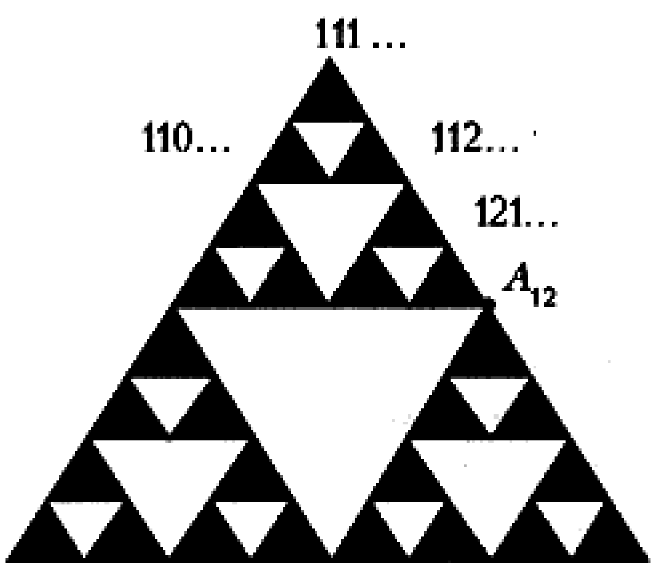

Рис. 7

Неоднозначность адреса, которая встречается у некоторых точек салфетки Серпинского, имеет в точности ту же природу, что и неоднозначность представления в виде десятичной дроби, которое имеется для некоторых действительных чисел. Например, число 0,129999... имеет также и другое представление: 0,13000...

Задачи

1. Покажите, что для i-й вершины треугольника n-го ранга все числа в ее адресе, начиная с $(n+1)$-го знака, равны i: $a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = i$.

2. Покажите, что если точка x не является вершиной треугольника ранга n, но лежит на его стороне, параллельной стороне A_iA_j большого треугольника $A_0A_1A_2$ (здесь предполагается, что индексы i и j равны 0, 1 или 2), то все числа в адресе точки x с $(n+1)$-го знака равны i или j.

3. Покажите, что точка x из салфетки Серпинского имеет не более 2 адресов.

4. Докажите, что точка x из салфетки Серпинского с адресом $адр = a_1, a_2, \ldots$ имеет второй адрес тогда и только тогда, когда для некоторого n имеем $a_n \ne a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots$ При этом второй адрес этой точки выражается через первый следующим образом:

$$a'_m = a_m, \text{ если } 1 \le m \le n-1,\ a'_n = a_n \text{ и } a'_{n+1} = a'_{n+2}.$$

Салфетка Серпинского самоподобна

Обозначим часть салфетки Серпинского, которая принадлежит треугольнику T_i^1, через T_i, $i = 0,1,2$ (см. рис.6). Ясно, что

$$T_c = T_0 \cup T_1 \cup T_2.$$

Обозначим через h_i преобразование гомотетии с центром в вершине A_i и коэффициентом гомотетии $1/2$. Возьмем одно из них, скажем h_0, и убедимся в том, что при нем салфетка Серпинского T_C отображается на T_0. Действительно, при гомотетии h_0 треугольник T_i^1 ранга 1 переходит в треугольник T_{0i}^2 ранга 2, и вообще, треугольник $T_{a_1\ldots a_n\ldots}^n$ ранга n переходит при h_0 в треугольник $T_{0a_1\ldots a_n\ldots}^n$ ранга $n+1$.

Пусть точка $x \in T_C$ имеет адрес $a_1a_2\ldots a_n\ldots$ Ей соответствует последовательность вложенных треугольников

$$T_{a_1}^1 \supset T_{a_1a_2}^2 \supset \ldots \supset T_{a_1a_2\ldots a_n}^n \supset \ldots \quad (3)$$

Последовательность (3) при h_0 переходит также в последовательность вложенных друг в друга треугольников:

$$T_0^1 \supset T_{0a_1}^2 \supset T_{0a_1a_2}^3 \ldots \supset T_{0a_1a_2\ldots a_n}^{a+n} \supset \ldots \quad (4)$$

Последовательности (4) соответствует точка $x' = h_0(x)$, которая также принадлежит салфетке. Адрес точки x' есть $0a_1a_2\ldots n\ldots$ Итак, под действием гомотетии h_0 каждая точка x салфетки T_C с адресом $a_1a_2\ldots n\ldots$ переходит в точку салфетки $x' = h_0(x)$ из T_0 с адресом $0a_1a_2\ldots n\ldots$, начинающимся с 0.

Верно и обратное: в любую точку x' салфетки из T_0, т.е. в точку с адресом $0a_1a_2\ldots n\ldots$, начинающимся с 0, переходит точка x со следующим адресом: $a_1a_2\ldots n\ldots$

Таким образом, доказано, что $h_0(T_C) = T_0$. Так как

$$T_C = T_0 \cup T_1 \cup T_2 = \\ = h_0(T_C) \cup h_1(T_C) \cup h_2(T_C),$$

то салфетка Серпинского есть объединение трех гомотетичных ей образов, и в этом смысле она *самоподобна*.

Попутно мы показали, что если точка $x \in T_C$ имеет адрес $адр(x) = a_1a_2a_3\ldots$, то адрес точки $x' = h_0(x) \in T_C$ следующий:

$$адр(h_0(x)) = 0a_1a_2a_3\ldots$$

Предельное множество для игры «Хаос»

Опишем игру «Хаос» при помощи гомотетий h_0, h_1, h_2. Действительно, по начальной точке x_0 и последовательности

$$\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots\}$$

чисел 0, 1, 2 каждую точку последовательности X в игре «Хаос» можно определить как образ предыдущей точки относительно некоторой гомотетии:

$$x_n = h_{\alpha_n}(x_{n-1}).$$

Так как коэффициент каждой гомотетии здесь равен $1/2$, то точка $x_n = h_{\alpha_n}(x_{n-1})$ есть середина отрезка $[x_{n-1}, A_{\alpha_n}]$.

Последовательность точек X называют *орбитой* точки x_0. Орбита X определяется, как мы видим, начальной точкой x_0 и последовательностью $\mathcal{A}$ чисел, которая задает последовательность преобразований гомотетии.

Прежде чем понять, почему при выведении на экран орбиты X получается салфетка Серпинского, заметим, что орбита не только не должна совпадать с салфеткой, но иногда вообще может не иметь с ней ни одной общей точки.

Для этого возьмем в качестве начальной точки x_0 какую-нибудь точку внутри центрального треугольника $A_{01}A_{12}A_{23}$ ранга 1, который, как мы знаем, не входит в салфетку Серпинскогом (см. рис. 6, *б*). Тогда точка орбиты $x_1 = h_{\alpha_1}(x_0)$ лежит внутри центрального треугольника ранга 2, который удаляется на втором этапе. Точно так же следующая точка орбиты $x_2 = h_{\alpha_2}(x_1)$ принадлежит центральному треугольнику, который удаляется на третьем этапе, и т.д. Таким образом, если точка x_0 принадлежит удаляемому на каком-то этапе центральному треугольнику, то орбита X не имеет с салфеткой Серпинского **ни одной** (!) общей точки. Но и в этом случае портрет орбиты имитирует салфетку Серпинского.

Объясним ключевую идею этого на простом примере. Возьмем последовательность $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$ и выведем первую тысячу ее точек на экран. «Портретом» этой последовательности является... единственная предельная точка 0 для этой последовательности. Точки последовательности, которые расположены «далеко» от предела 0, если присмотреться, тоже можно заметить. Но этих точек, благодаря высокой скорости сходимости последовательности, совсем немного, расположены они изолированно и на общую картину не влияют. (От скорости схождения существенно зависит портрет орбиты. Действительно, возьмем последовательность 1, 0,999, ..., 0, 999^n, ... Ее предел будет тем же, что и у предыдущей последовательности. Однако сходится она к 0 медленно, и ее портрет будет совершенно другим. Он будет выглядеть как множество точек, распределенное по всему отрезку, постепенно сгущающееся в окрестности нуля.) Мы покажем, что в игре «Хаос» мы получаем орбиту X, «предел» которой есть целое множество точек — салфетка Серпинского. Причем орбита «сходится» к своему «пределу» весьма быстро потому, что коэффициент подобия $\frac{1}{2}$ намного меньше единицы.

Пусть дана орбита $X=\{x_1, x_2, \ldots\}$. Точка y называется *предельной* для орбиты X, если для любого положительного ε найдется бесконечно много точек из X, которые лежат в ε-окрестности точки y. Точка y — некоторая точка плоскости, вообще говоря, не принадлежащая орбите. Заметим, что в случае, когда орбита X является сходящейся в известном смысле последовательностью, то ее предел является *единственной* предельной точкой. Но, вообще говоря, орбита X может иметь много предельных точек. Множество *всех* предельных точек y для орбиты X называется *предельным* множеством орбиты X. Обозначим его через $LimX$.

Возьмем фиксированную последовательность преобразований подобий $\{h_{\alpha_i}\}$, $\alpha_i = 0$, 1 или 2, и рассмотрим «параллельные» орбиты X и X' двух различных начальных точек x_0 и x_0'. Оказывается, эти орбиты, хотя и различны, имеют одно и то же предельное множество:

$$LimX = LimX'.$$

Причина этого, на первый взгляд неожиданного, утверждения — в том, что точки параллельных орбит с одинаковыми номерами сближаются при увеличении номера n. Действительно, так как h_i есть гомотетия с коэффициентом $1/2$, то для расстояний между соответствующими точками имеем

$$|x_1, x_1'| = \frac{1}{2}|x_0, x_0'|,$$
$$|x_2, x_2'| = \frac{1}{2}|x_1, x_1'| = \frac{1}{2^2}|x_0, x_0'|, \ldots$$
$$\ldots, |x_n, x_n'| = \frac{1}{2}|x_{n-1}, x_{n-1}'| = \ldots$$
$$\ldots = \frac{1}{2^n}|x_0, x_0'|. \quad (5)$$

Пусть y — предельная точка для орбиты X. Тогда в любой маленькой окрестности точки y найдется бесконечно много точек из орбиты X: x_{n_1}, $x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$ Но так как согласно (5) орбиты сближаются, то в любой маленькой окрестности найдется бесконечно много точек из орбиты X' также. Таким образом, точка y является предельной и для орбиты X'. И обратно, совершенно симметрично, всякая предельная точка для орбиты X' есть предельная точка и для X. Таким образом, $LimX = LimX'$.

Универсальные последовательности и салфетка Серпинского

Последовательность $\mathcal{A}$ чисел 0,1 и 2 назовем *универсальной*, если она содержит *любой* конечный набор чисел 0, 1 или 2.

Легко дать примеры НЕуниверсальной последовательности: 000..., 111... или 012012012... Первый пример универсальной последовательности, который приходит в голову, это — последовательность, в которой сначала выписываются все слова из 0, 1 и 2 длины 1, затем все слова из тех же цифр длины 2, за ними все слова длины 3 и т.д.

Это — весьма искусственная последовательность. На первый взгляд кажется, что универсальная последовательность — это относительно редкий объект во множестве всех бесконечных последовательностей. Однако ниже мы объясним, что как раз наоборот, универсальная последовательность — это типичная последовательность, а неуниверсальные последовательности составляют исключение, подобно тому, как периодические десятичные дроби составляют исключение среди всех вообще действительных чисел.

Теперь мы готовы сформулировать теорему, которая является ключом к ответу на наш основной вопрос: почему орбита на «фотографии» выглядит как салфетка Серпинского.

Теорема. *Пусть $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ — универсальная числовая последовательность и X — соответствующая орбита произвольной точки x_0. Тогда $Lim\ X = T_C$.*

Идея доказательства теоремы. Как мы уже знаем, для фиксированной последовательности $\mathcal{A} = \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ предельное множество $Lim\ X$ не зависит от выбора начальной точки. Поэтому в качестве начальной точки можно взять произвольную точку из салфетки Серпинского. По доказанному выше, для точки x из салфетки T_C ее образ $h_{\alpha_i}(x)$ также принадлежит салфетке и его адрес начинается с числа α_i. Поэтому адрес n-й точки орбиты X начинает с $\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_2\alpha_1$.

Возьмем произвольную точку из салфетки y, она имеет адрес $адр(y) = a_1 \ldots a_m \ldots$ Пусть $w = a_m \ldots a_1$ есть слово, состоящее из первых m знаков адреса точки y, взятых в обратном порядке. Так как $\mathcal{A}$ — универсальная последовательность, то $\mathcal{A}$ содержит хотя бы раз (и следовательно, как легко показать, бесконечно много раз) слово w. Возьмем отрезок последовательности $\mathcal{A}$ некоторой длины n, который заканчивается этим словом: $a_1 \ldots a_{n-m} a_m \ldots a_1$. Это означает, что соответствующая точка орбиты $x_n = h_{\alpha_1}(\ldots h_{\alpha_m}(x_{n-m}))$ имеет адрес, начинающийся, как и адрес точки y, с $a_1, \ldots, a_m$. Отсюда следует, что расстояние $|x_n, y| < \frac{1}{2^m}$, где за единицу принята длина стороны исходного треугольника. Так как m может быть сколь угодно большим, то произвольная точка y из салфетки является предельной точкой орбиты X.

Можно показать, что и, обратно, любая предельная точка для орбиты X принадлежит салфетке Серпинского.

Таким образом, из теоремы следует, что в случае *универсальной* последовательности $\mathcal{A}$ каждая точка салфетки Серпинского притягивает к себе неограниченно много точек орбиты. Образующиеся на экране сгущения вокруг точек салфетки создают зрительное восприятие салфетки Серпинского. Точки орбиты, которые отстоят от салфетки, тоже присутствуют на фотографии «достаточно далеко», их тоже можно разглядеть. Но так как они расположены изолированно, то на фоне яркого созвездия под названием «Салфетка Серпинского» они малозаметны и никак не влияют на общую картину.

Типичность универсальной последовательности

Сейчас нам остается объяснить, почему последовательность $\mathcal{A}$, выдаваемая при игре «Хаос», всегда (точнее сказать: «почти всегда») является универсальной. Здесь мы вторгаемся в святая святых теории вероятностей, о которой в школьной математике не говорится ни слова. Поэтому наше объяснение нельзя считать доказательством. Это лишь идеи, на которых можно построить строгое доказательство.

Итак, мы исходим из того, что бросаемая нами кость совершенно симметрична и при каждом бросании шансы выпасть у каждой из трех цифр одинаковы. Поэтому можно предполагать, что все троичные последовательности $\mathcal{A}$ между собой равноправны. Последовательность, состоящая, скажем, из одних n нулей 000...0 имеет шанс выпасть не больше и не меньше, чем, скажем, последовательность из n чисел 012012..., в которой все цифры равномерно перемешаны. Троичных (бесконечных) последовательностей бесконечно много, поэтому каждая такая фиксированная последовательность, в том числе и каждая универсальная последовательность, имеет один и тот же бесконечно ничтожный шанс выпасть в результате бросания кости.

Но нас не интересует *конкретная* универсальная последовательность. Нам нужно выяснить, насколько часто выпадает вообще *какая-то* универсальная последовательность. Покажем, что универсальные последовательности должны выпадать несравнимо чаще, чем остальные.

Чтобы показать это, сопоставим каждой троичной последовательности $\mathcal{A}$ конкретное действительное число

$0 \le \tau \le 1$, которое равно $\tau = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{3^n}$.

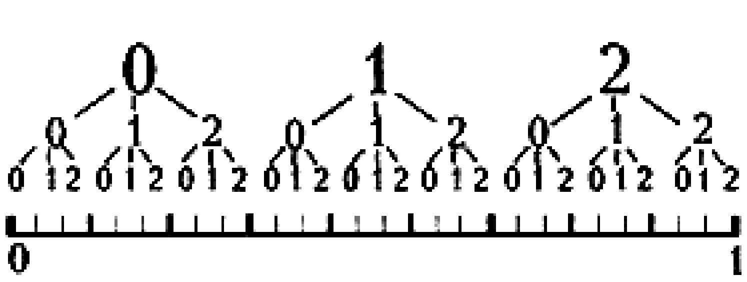

Рис. 8

Указанное соответствие между троичными последовательностями вида $\mathcal{A}$ и действительными числами на отрезке $[0, 1]$ устанавливается точно так, как это делается при разложении действительного числа в десятичную дробь (рис. 8).

Последовательность $\mathcal{A} = (\alpha_n)$ можно рассматривать одновременно как разложение числа τ в «троичную» дробь и как троичный адрес точки τ на отрезке $[0, 1]$.

Поэтому выбор случайной последовательности $\mathcal{A}$ равносилен тому, что мы случайным образом выбираем точку на отрезке $[0, 1]$. Ткнем наугад иголкой в какую-нибудь точку на отрезке $[0, 1]$. Мы будем предполагать, что иголка столь остра, что известный вопрос — сколько чертей сидит на конце иглы — имеет ответ: только один. Вопрос: каков шанс того, что действуя наугад мы попадем в точку, лежащую на отрезке $[0, 1/2]$? Ответ: пятьдесят на пятьдесят — можно считать правильным. Он соответствует духу геометрической вероятности: чем меньше длина отрезка, тем меньше шанс в него попасть.

А каков с этой точки зрения шанс того, что мы попадем в точку x, которая принадлежит отрезку $[1/3, 1]$? Геометрическая вероятность попасть в такую точку равна отношению длины этого отрезка к длине $[0, 1]$, т.е. $2/3$.

Вероятность попадания в точку, принадлежащую хотя бы одному из двух (неперекрывающихся) отрезков, скажем $[4/9, 2/3]$ и $[7/9, 1]$, равна сумме их длин, т.е. $4/9$.

Эти численные примеры взяты не совсем случайно. Отрезок $[1/3, 1]$ содержит все такие точки (и только такие), у которых в их троичном адресе на первом месте стоит не 0. Вторые два отрезка $[4/9, 2/3]$ и $[7/9, 1]$ состоят из точек, в адресе которых 0 отсутствует и на первом и на втором местах. Таким образом, вероятность попадания в точку, которая не содержит 0 на первых двух местах, равна $\left(\frac{2}{3}\right)^2$. Можно проверить, что вероятность того, что точка x в своем адресе не содержит 0 ни на одном из первых n мест, равна $\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Вообще, можно показать следующее.

Задача 5. Для фиксированного троичного слова w_k длины k, рассмотрим множество $M_n(w_k)$ точек, в адресе которых на первых n местах ни разу не содержится слово w_k. Если L_n — сумма длин отрезков, содержащих точки из $M_n(w_k)$, то

$$L_1 = \ldots L_{k-1} = 1$$

и

$$L_n = \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^k\right) \cdot L_{n-1} \text{ для } n \ge k. \quad (6)$$

Для любого фиксированного k суммарная длина L_n стремится к нулю, если $n \to \infty$. Таким образом, вероятность попадания в точку, адрес которой не содержит хотя бы одну комбинацию фиксированной длины, равна нулю. Таким образом, если бы игра «Хаос» продолжалась неограниченно долго, то в результате получалась бы, как говорят «с вероятностью единица», универсальная последовательность.

На практике же мы имеем дело не с бесконечной последовательностью, а с конечной, состоящей, скажем, из $n = 5000$ чисел. Подсчитаем суммарную длину L_{5000} интервалов, адреса точек которых не содержат на первых 5000 местах хотя бы одного слова длины 5. По формуле (6) суммарная длина равна

$$L_{5000} = \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^5\right)^{5000-5} \approx 10^{-10}.$$

Таким образом, вероятность того, что на первой тысяче шагов выпадет любое слово длины 5, очень близка к единице. Более того, весьма вероятно, что такое слово выпадет не единожды. Это означает, что среди первых 5000 точек с вероятностью $1 - 10^{-10} = 0{,}9999999999$ для *любой* точки x из салфетки Серпинского найдется такая точка орбиты, которая будет отстоять от x на расстояние порядка 10^{-3} (длина стороны исходного треугольника $A_0A_1A_2$ принимается за единицу). Даже эти, грубоватые, оценки подтверждают, что орбита X, получающаяся в игре «Хаос», действительно, должна хорошо имитировать салфетку Серпинского.

В заключение отметим, что салфетка Серпинского является *фракталом* в смысле определения Мандельброта, о котором упоминалось выше. Дело в том, что так называемая хаусдорфова размерность салфетки Серпинского есть нецелое число, равное $\frac{\log_3}{\log_2} \approx 1{,}584$ ...(!) Почему?... Это — предмет другой статьи.