Кругами по лесу, или Кардиоида для грибника

С.БОГДАНОВ

Ранним утром в ясный сентябрьский день мы, трое грибников, вышли с востока на знакомую просеку со старой линией электропередач. Тропинка вывела к приметному столбу с изгрызенным лосями основанием; здесь западнее просеки начинались груздевые места. Решили, разделившись, углубиться в лес и встретиться через 4 часа на том же месте. Компасов не было, но ориентиры были надежными: просека тянется строго с севера на юг, солнце — на востоке, на границах массива — большие озера (рис.1).

Чтобы не отвлекаться на ориентировку и вовремя вернуться, я выбрал простейший вариант движения: половину времени идти в направлении «солнце в спину», а возвращаться — в противоположном направлении. Корзину я наполнил, но на обратном пути пришлось немного скорректировать маршрут; в итоге я вышел на просеку примерно в километре южнее условленного места и опоздал на 15 минут.

По возвращении я решил разобраться с траекторией своей прогулки и выяснить, где в принципе мог бы оказаться, если бы строго следовал своему плану. После некоторых разумных допущений задача выглядела так:

Рис.1

Точка B — Солнце — движется в плоскости XY с постоянной угловой скоростью ω по окружности большого радиуса, центр которой расположен в начале координат (рис.2). Точка A — грибник — движется из начала координат с постоянной по величине скоростью v в направлении «от B», т.е. скорость в любой момент направлена вдоль линии «Солнце — грибник». В некоторый момент времени t направление скорости меняется на противоположное, и в дальнейшем точка A движется в направлении «на B». Каковы координаты точки A в момент времени 2t?

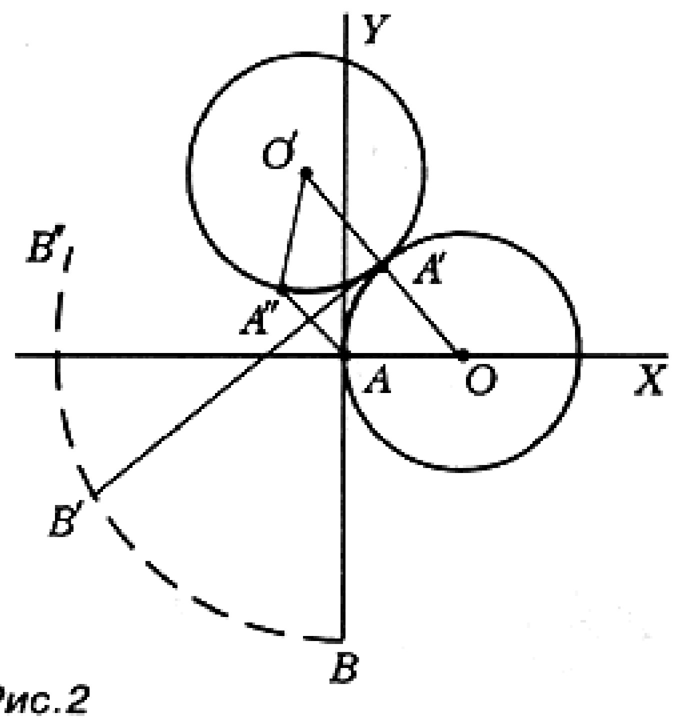

Рис.2

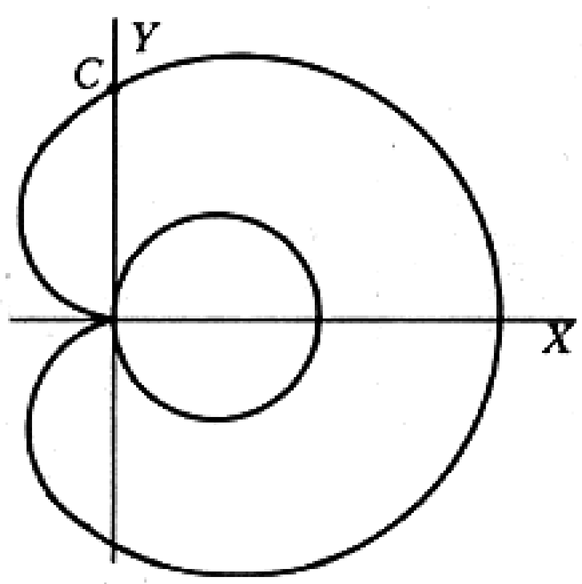

Рис.3

Решение оказалось весьма простым и интуитивно понятным, особенно для тех, кто хотя бы однажды «ходил кругами по лесу». Действительно, точка A движется с одной и той же скоростью по величине, но все время в направлении «от точки B», которая описывает окружность. Следовательно, точка A тоже движется по окружности, причем с той же самой угловой скоростью, что и точка B. За то время, что Солнце переместилось из B в B', грибник описал дугу окружности AA'. Очевидно, аналогичным образом описывается и обратное движение от места поворота A' до конечного положения A''. При этом окружность, по дуге $A'A''$ которой точка движется на обратном пути, имеет тот же радиус, а ее центр O' расположен на линии, перпендикулярной $A'B'$ и проходящей через точку касания A'.

В качестве дополнительного материала для более старших читателей приведем некоторые расчеты. Используя известное соотношение между линейной и угловой скоростями, для радиуса окружности, по которой движется точка A, имеем $R = v/\omega$. Кроме того, из начальных условий задачи следует, что центр окружности

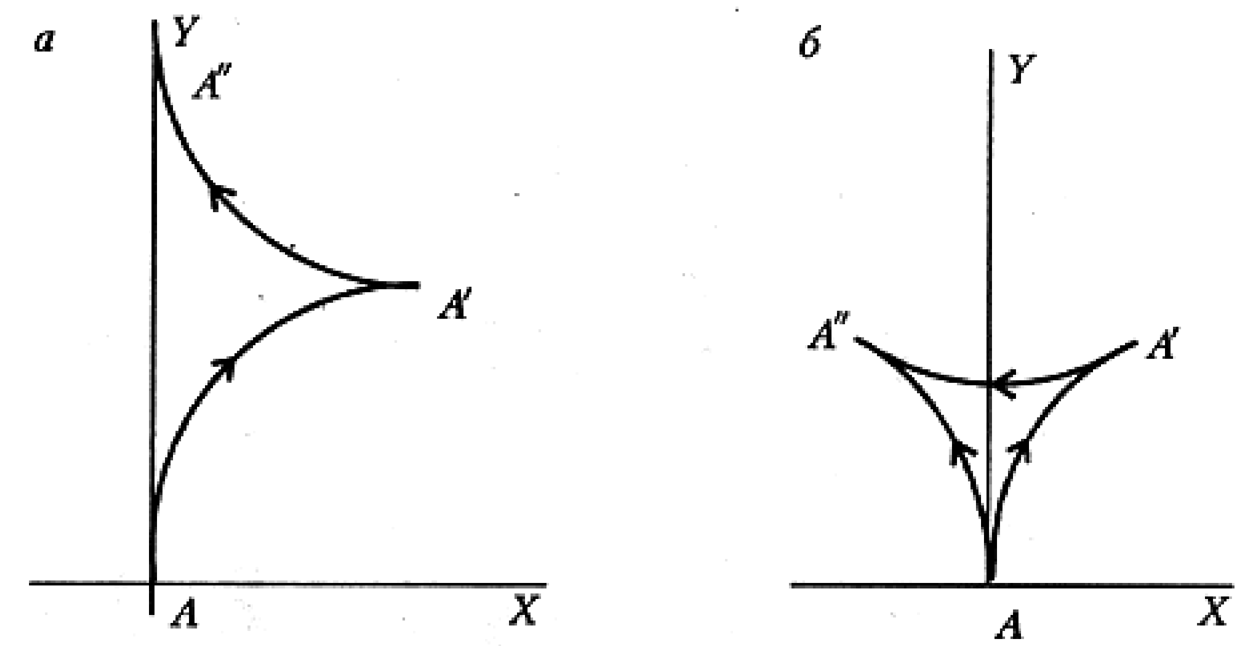

Рис.4

находится в точке с координатами $(v/\omega$; $0)$. После несложных геометрических выкладок (например, из рассмотрения трапеции $AOO'A''$) нетрудно найти положение конечной точки A'', т.е. расстояние r от начальной точки A и угол $\theta = \angle A''AO$:

$$\theta = \pi - \omega t, \quad r = AA'' = 2v(1+\cos\theta)/\omega.$$

Величины r и θ называют полярными координатами точки. Теперь, учитывая, что $\omega = 2\pi/24$ ч$^{-1}$, проанализируем полученный ответ для характерного интервала возможных значений параметра t : [0, 6] часов. При малых t величина θ немногим меньше π, т.е. наблюдается существенное азимутальное отклонение от первоначального направления $\pi/2$ при относительно небольшом удалении r конечной точки от начальной. При приближении к правой границе указанного выше интервала азимутальное смещение практически исчезает, но существенно увеличивается величина r.

В качестве примера численной оценки воспользуемся значениями $t = 2$ ч, $v = 2$ км/ч, соответствующими описанной в начале прогулке. Угол θ оказывается при этом равным $5\pi/6$, а радиус R и удаление r равны приблизительно 8 км и 2,4 км соответственно.

Рисунок 2 позволяет также наглядно геометрически представить положение конечной точки A''. Предположим, что в начальный момент времени окружности O и O' касаются в точке A, а затем окружность O' начинает катиться без проскальзывания по окружности O. К моменту времени t, когда окружности касаются друг друга в точке разворота A', первоначальная точка касания окружности O' переместится в положение A''. Таким образом, множество возможных положений конечной точки A'' маршрута при заданной скорости v и различных значениях t совпадает с траекторией одной из точек окружности O' при ее прокатывании по окружности O. Соответствующая линия в геометрии называется *кардиоидой*, ее график представлен на рисунке 3 (а уравнение было получено выше). Такую линию легко построить, используя подручные средства, а чертеж – при отсутствии карты или в качестве дополнения к ней может – оказаться небесполезным в лесу.

Еще немного дополнений. Точка C на рисунке 3 представляет конечное положение при $t = 6$ ч, соответствующая траектория изображена на рисунке 4,*а*. Азимутальное отклонение в этом случае, как отмечалось выше, равно 0, но $r \approx 16$ км при характерных значениях параметров. Таким образом, вариант прогулки на целый день ($2t = 12$ч) по плану «от Солнца – по Солнцу» в этом случае явно неудачен и даже опасен. Впрочем, в качестве альтернативы здесь можно предложить трехзвенную траекторию (рис.4,*б*), при реализации которой сохраняется главное преимущество – ориентация лишь по Солнцу.

В заключение отметим, что аналогичным образом можно геометрически проанализировать более общий случай, когда прямое и обратное движения происходят с разными скоростями. Легко, в частности, показать, что все конечные положения будут находиться на линии $A'A''$, т.е. увеличение скорости на обратном пути приводит лишь к еще большему удалению от первоначальной точки A.

И последний вывод: все же, собираясь в лес, не забывайте взять с собой компас.