сколь угодно близким к 8. Но $\sin\frac{2\pi}{n} < \frac{2\pi}{n}$ и $n\sin\frac{2\pi}{n} < 2\pi < 7$. Значит, при $n \geq 10$ существует n-угольник такой, что

$$\sum_{i=1}^{n} \sin\alpha_i > n\sin\frac{2\pi}{n}.$$

6. $\left[\frac{3n}{2}\right]-4$. Применим индукцию. База — случаи $n = 3$ и $n = 4$ — очевидна. Пусть n — некоторое натуральное число и пусть мы уже доказали формулу $\left[\frac{3k}{2}\right]-4$ для всех выпуклых k-угольников при $k < n$.

Рассмотрим n-угольник ($n > 4$). Пусть в нем проведены некоторые диагонали с соблюдением условия задачи. Докажем, что можно считать, что некоторая из проведенных диагоналей не пересечена ни одной из проведенных диагоналей («пересечена», как всюду в этой задаче, означает «пересечена во внутренней точке»). Возьмем любую из проведенных, диагоналей AB. Если AB пересечена некоторой проведенной диагональю CD, то можно без ограничения общности считать AC диагональю. Эта диагональ не может быть пересечена никакой проведенной диагональю. Добавив, если нужно, AC к системе диагоналей, завершаем доказательство. Если непересеченная диагональ рассекает n-угольник на r-угольник и s-угольник, то, во-первых, $r + s = n + 2$ (концы диагонали входят в обе части), во-вторых, число проведенных диагоналей не превосходит

$$\left(\left[\frac{3r}{2}\right]-4\right)+\left(\left[\frac{3s}{2}\right]-4\right)+1 \leq \left[\frac{3(r+s)}{2}\right]-7 = \left[\frac{3(n+2)}{2}\right]-7 = \left[\frac{3n}{2}\right]-4.$$

Оценка сверху доказана. А пример, когда эта оценка достигается, очевиден: можно по очереди отрезать (диагональю!) от n-угольника четырехугольники и проводить в каждом из них обе диагонали.

7. а) При помощи теоремы о вписанном угле доказывается для любого (а не только вписанного) четырехугольника следующий факт: *если E — точка пересечения прямых AB и CD, F — точка пересечения прямых AD и BC, то описанные окружности треугольников ABF, CDF, BEC и ADE проходят через одну общую точку* (рис.9).

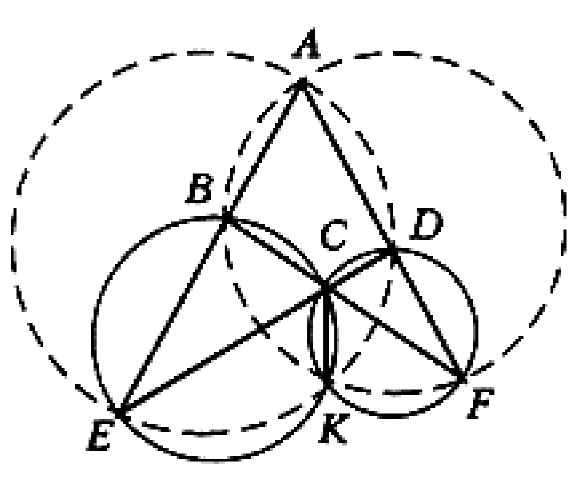

Рис. 9

Доказательство. Заметим, что описанные окружности треугольников BCE и CDF пересекаются в двух точках; обозначим через K точку пересечения этих окружностей, отличную от C. Докажем, что $ABKF$ (и, аналогично, $ADKE$) — вписанный; для этого вычислим сумму противоположных углов:

$$\angle BAF + \angle BKF = \angle EAD + \angle BKC + \angle CKF = \angle EAD + \angle BEC + 180^\circ - \angle CDF = 180^\circ.$$

(Использованы равенство углов $\angle BKC = \angle BEC$, опирающихся на одну дугу, и теорема о внешнем угле треугольника ADE: $\angle CDF = \angle EAD + \angle BEC$.)

Для завершения доказательства пункта а) осталось показать, что если $ABCD$ вписан в окружность с центром O, то K лежит на описанных окружностях треугольников BOD и AOC. Так как $\angle BCD > \angle BAD$, то точка O лежит внутри треугольника ABD. Следовательно, четырехугольник $BODK$ — выпуклый. Теперь посчитаем:

$$\angle BOD + \angle BKD = \angle BOD + \angle BKC + \angle CKD =$$

$$= \angle BOD + \angle BEC + \angle CFD = \breve{BC} + \breve{CD} + \frac{\breve{DA} - \breve{BC}}{2} + \frac{\breve{AB} - \breve{CD}}{2} =$$

$$= \frac{\breve{BC} + \breve{CD} + \breve{DA} + \breve{AB}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ,$$

где все дуги, разумеется, являются дугами окружности с центром O.

б) Докажем, что K лежит на прямой EF:

$$\angle CKE + \angle CKF = 180^\circ - \angle CBE + 180^\circ - \angle CDF = \angle ABC + \angle CDA = 180^\circ.$$

Перпендикулярность прямых OK и EF следует из равенства углов $\angle BKO = \angle OKD$ (эти углы опираются на равные хорды BO и OD окружности, описанной вокруг четырехугольника $BODK$) и равенств $\angle BKE = \angle BCE = \angle DCF = \angle DKF$.

8. Не может. Пусть куб расположили так, что все его вершины оказались на поверхности другого куба и никакая его грань не параллельна никакой грани второго куба. Поскольку у куба восемь вершин и всего лишь шесть граней, то хотя бы одно ребро внутреннего куба должно оказаться на грани внешнего. Рассмотрим ортогональную проекцию внутреннего куба на эту грань. Получим прямоугольник, вписанный в квадрат. Если длина ребра внешнего куба равна 1, то длина диагонали грани внутреннего куба не может быть меньше 1. Значит, длина ребра внутреннего куба не меньше $1/\sqrt{2}$. Таким образом, в квадрат со стороной 1 вписан прямоугольник, одна сторона которого (проекция ребра внутреннего куба) не меньше $1/\sqrt{2}$. Другая сторона является проекцией грани внутреннего куба и должна быть больше стороны этой грани, т.е. ребра этого куба. Но в квадрат со стороной 1 можно лишь единственным образом вписать прямоугольник, обе стороны которого не меньше $1/\sqrt{2}$. В этом случае обе стороны в точности равны $1/\sqrt{2}$. Противоречие.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ МОСКОВСКОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

9 класс

1. $a_1 = -2$ м/с^2; $a_2 = -4$ м/с^2.

2. Нужно сначала взвесить рыбу на одной чашке весов, получив при этом значение m_1. Затем можно добавить в чашку с рыбой гирю известной массы m_2 и получить при взвешивании значение m_3. Теперь из условия равновесия весов легко найти истинное значение массы рыбы: $m = m_1 m_2/(m_3 - m_1)$.

3. $\mu \geq 0{,}56$.

4. $\tau_1 \approx 13{,}06$ мин; $\tau_2 \approx 10{,}35$ мин.

5. $v = \sqrt{gL/\cos\alpha}\,\sin^2\alpha$.

6. $a_2 = g\dfrac{m_2(m+m_1)}{m(4m_1+m_2)+m_1 m_2}$.

7. $R_5 = \dfrac{1}{\alpha}\dfrac{R_3 R_4}{R_3+R_4}\left(\dfrac{R_3}{R_3+R_4} - \alpha\right)$.

10 класс

1. $\dfrac{F_c}{mg} = \dfrac{\rho u^2 \pi d^2}{8mg} \approx 70$.

2. $\dfrac{m}{M} = \dfrac{8\pi A}{gT^2(2N+1)}$, где $N = 0, 1, 2, \dots$ — число периодов колебаний, прошедших между соударениями шарика и платформы.