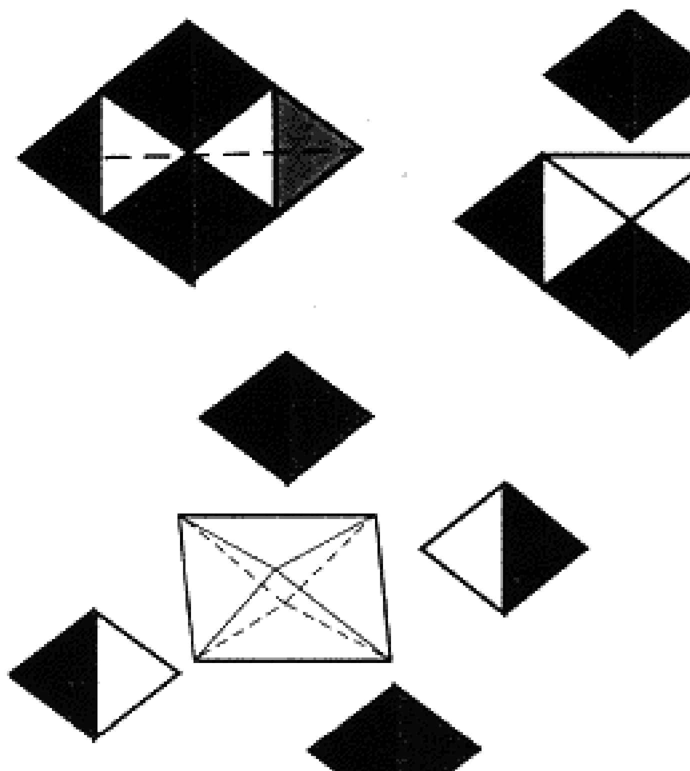

Рис. 5

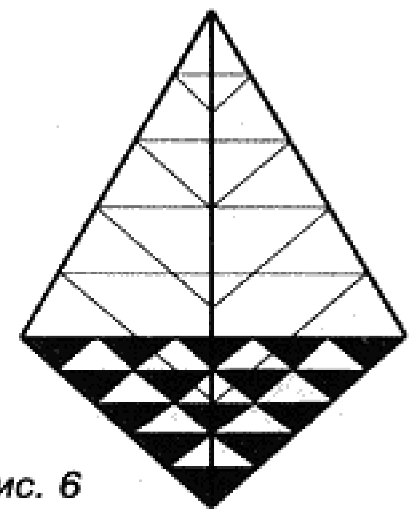

Рис. 6

сать и по-другому. Рассмотрим обычную кубическую решетку (точки с целыми координатами в пространстве), узлы которой раскрашены в шахматном порядке (точки с четной суммой координат — черные, точки с нечетной суммой — белые). В каждый единичный кубик впишем тетраэдр с вершинами в 4-х черных вершинах кубика. Тогда каждый белый узел будет центром правильного октаэдра, ограниченного 8-ю гранями тетраэдров из соседних кубиков. Выберем в пространстве куб, состоящий из N^3 единичных кубиков, у которого четыре вершины черные, а четыре другие — белые. Тогда тетраэдр с вершинами в 4 черных точках будет, как легко видеть, состоять из тетраэдров и октаэдров, на которые мы разбили пространство: все грани большого тетраэдра проходят только через черные узлы.

Избранные задачи отборочного тура

1. $p = 2n$.

Наборы гирь 1 г, 1 г, ..., 1 г и 2 г, 2 г, ..., 2 г по n штук в каждом различить нельзя. Значит, $p \le 2n$.

Докажем, что если сумма масс гирь меньше $2n$, то можно определить все массы. Если самая тяжелая гиря весит m граммов, то не менее $m - 1$ гири имеют массы 1 г: в противном случае общая масса была бы не меньше

$$(m-2)\cdot 1+m+(n-m+1)\cdot 2=2n.$$

Имея $m - 1$ гирю по 1 г, можно взвесить все гири, массы которых меньше m г. Оставшиеся гири весят m г каждая.

2. Рассмотрим сумму всех положительных чисел на счетах у банкиров. После каждой операции эта сумма не увеличивается, и хоть раз (а именно, после первой же операции с ненулевым числом) она уменьшится.

3. Допустим, что ломаная, отличная от диаметра, делит площадь круга пополам. Можно считать, что ломаная имеет общую точку с окружностью (иначе сделаем параллельный перенос ломаной). Пусть A и B — концы этой ломаной (которые могут и совпадать). Рассмотрим ломаную с концами A' и B', центрально-симметричную (относительно центра круга) исходной ломаной. Эти ломаные обязаны пересечься (поскольку каждая отсекает половину площади круга). Возьмем ближайшую к точке A точку C их пересечения (расстояния отсчитываются вдоль ломаной от A к B). Центрально-симметричная точка C' также является точкой пересечения этих ломаных. Среди участков ломаных AC и $B'C$ выберем кратчайший (пусть это AC). Тогда ломаная $ACC'A'$ центрально-симметрична. Следовательно, она делит площадь круга пополам. С другой стороны, она короче (или равна) исходной ломаной. Но диаметр AA' еще короче (или равен) ломаной $ACC'A'$, причем равенство достигается только тогда, когда исходная ломаная — диаметр.

4. Докажем сначала **лемму**: *существует бесконечно много простых чисел, не входящих в* A_n.

Доказательство. Множество таких простых чисел непусто: оно содержит любой простой делитель числа $n - 1$. Предположим, что множество конечно; обозначим произведение его элементов через P. Пусть p — простой делитель числа $nP - 1$, не имеющий вида $kn + 1$. Очевидно, P не делится на p. Лемма доказана.

Выберем в (бесконечном) множестве чисел леммы различные простые p_1 и p_2 такие, что $p_1 \equiv p_2 \pmod{n}$. Из принципа Дирихле следует, что существуют натуральные числа q такие, что $p_1^q \equiv 1 \pmod{n}$. Очевидно, одновременно и $p_2^q \equiv 1 \pmod{n}$. Обозначим через m наименьшее из таких q; очевидно, $m > 1$. Рассмотрим число $a = \left(p_1^m\right)\left(p_2^m\right) = \left(p_1^{m-1}p_2\right)\left(p_2^{m-1}p_1\right)$. Вследствие минимальности m оба выписанных разложения числа a являются разложениями в произведения двух неприводимых в A_n чисел.

5. Утверждение задачи верно в точности при $4 \le n \le 6$. Если n-угольник не является выпуклым, то хотя бы одно из чисел $\sin\alpha_i$ отрицательно; значит, при $n = 4$ и при $n = 6$ утверждение задачи верно. Пусть $n = 5$, тогда $\sum_{i=1}^{5}\sin\alpha_i < 4$. Докажем, что $5\sin\frac{2\pi}{5} > 4$. Нетрудно вычислить $\sin\frac{2\pi}{5}$. Можно поступить еще проще: $\sin\frac{2\pi}{5} > \sin\frac{2\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{4}{5}$. (Или так: $\sin\frac{2\pi}{5} > \frac{2}{\pi}\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{4}{5}$.) Следовательно, при $n = 5$ утверждение задачи тоже верно. Пусть $n \ge 7$. Рассмотрим многоугольники на рисунке 7. Приблизим углы B, D, E к прямым

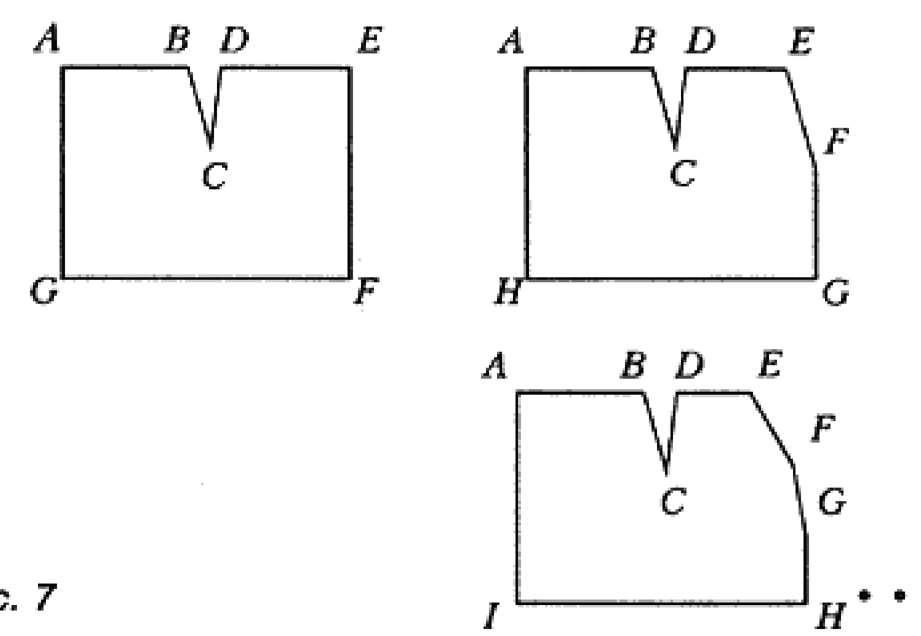

Рис. 7

углам. Ясно, что таким образом мы для любого значения $n \ge 7$ получим n-угольник такой, что число $\sum_{i=1}^{n}\sin\alpha_i$ окажется сколь угодно близким к 6. Но при $4 \le n < 12$ имеем $n\sin\frac{2\pi}{n} < 6$. Действительно, функция $\frac{\sin x}{x}$ на полуинтервале $(0, \pi/2]$ монотонно убывает; поэтому $n\sin\frac{2\pi}{n} < 12\sin\frac{2\pi}{12} = 6$ (при $4 \le n < 12$).

Получили: при $7 \le n < 12$ найдется n-угольник такой, что

$$\sum_{i=1}^{n}\sin\alpha_i > n\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Пусть $n \ge 10$. Рассмотрим многоугольники на рисунке 8. Приблизим углы, помеченные на рисунке 8 точками, к прямым углам. Ясно, что при этом число $\sum_{i=1}^{n}\sin\alpha_i$ окажется

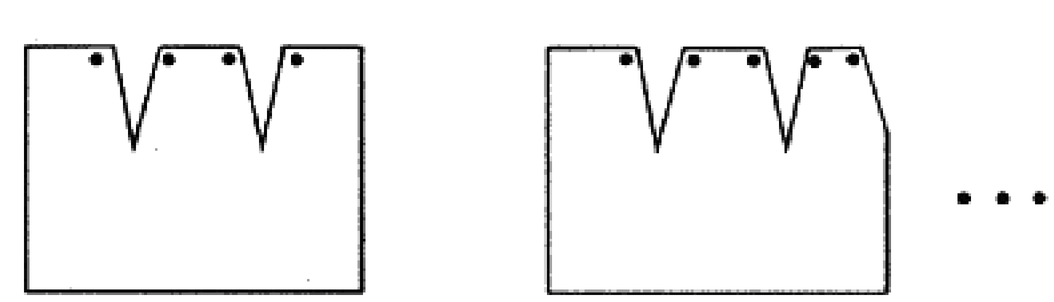

Рис. 8