кольку участки леса повторяются периодически. Назовем поезд ближайшим к станции, если он прибудет на эту станцию раньше остальных. Рассмотрим момент, когда некоторый поезд отходит от станции B. Пусть в этот момент ближайший к станции A поезд находится на расстоянии x от нее. Тогда весь интервал между ними длины x покрыт лесом. Покажем, что соседние интервалы длины $1-x$ лесом не покрыты. Действительно, когда ближайший к A поезд придет в A, то ближайший к B поезд будет на расстоянии $1-x$ от B.

Величина x меньше единицы (интервала между машинистами), она получается вычитанием из длины дуги BAC наибольшего целого числа, не превосходящего этой длины, т.е. $x = \{2n/3\}$ — дробной части числа $2n/3$. Итак, если n делится на 3, то лес отсутствует; если n при делении на 3 дает остаток 1, то лес составляет $2/3$ дороги; если n при делении на 3 дает остаток 2, то лес составляет $1/3$ дороги.

5. Участники турнира делятся на тех, кто увеличил свою сумму очков (не менее чем на n), и тех, кто ее уменьшил. Хотя бы одна из этих двух групп включает не менее n спортсменов. Пусть, например, такова первая группа и пусть в ней x спортсменов. Если их общая сумма очков увеличилась на D, то

$$D \ge x \cdot n.$$

Эта сумма увеличилась за счет встреч x спортсменов с остальными $2n-x$. Каждая из этих встреч добавила не более одного очка. Поэтому $D \le x\cdot(2n-x)$. В итоге получаем $2n - x \ge n$. Но по предположению $x \ge n$. Значит, $x = n$. Следовательно, $D = n\cdot n$, и каждый спортсмен первой группы увеличил свою сумму очков ровно на n. Ко второй группе применимо такое же рассуждение.

10 класс

1. Рассмотрим шар и его проекции на три плоскости. Пусть некоторая точка сферы не проецируется ни на одну из границ проекций. Тогда небольшая «сферическая шапочка» обладает тем же свойством. Отрежем от шара соответствующий кусочек — получим фигуру, не являющуюся шаром, но дающую те же самые проекции на рассматриваемые плоскости.

2. Перенесем треугольник ABD на вектор $\overrightarrow{AC}$ в новое положение $C'B'D'$. Четырехугольник $BB'D'D$ — параллелограмм. По неравенству треугольника $BC + CD' \ge BD'$ и $B'C + CD \ge B'D$; равенства достигаются только если C — точка пересечения BD' и DB'.

3. б) Очевидно, из правильного многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ после продолжения сторон получится правильный многоугольник $B_1B_2\ldots B_n$. Поскольку все правильные n-угольники подобны, то любой из них можно получить такой процедурой из некоторого правильного n-угольника. Осталось доказать, что по многоугольнику $B_1B_2\ldots B_n$ многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$ определяется однозначно.

При гомотетии с центром B_1 и коэффициентом $1/2$ точка A_1 перейдет в A_2. При гомотетии с центром B_2 и коэффициентом $1/2$ точка A_2 перейдет в A_3, и так далее. При гомотетии с центром B_n и коэффициентом $1/2$ точка A_n перейдет в A_1. Итак, точка A_1 перешла в себя при композиции гомотетий. Композиция n гомотетий с коэффициентами $1/2$ есть гомотетия с коэффициентом $1/2^n$ и центром, однозначно определяемым центрами этих гомотетий. Значит, точка A_1 однозначно определена.

4. Рассмотрим многочлены $P(x) = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$ и $Q(x) = (x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)$. Они отличаются только свободным членом (достаточно раскрыть скобки). Поэтому график одного многочлена получается из графика другого сдвигом вдоль оси ординат. При $x \le b_1$ имеем $Q(x) \le 0$, в частности, $Q(a_1) \le 0$. Значит, график $y = Q(x)$ получается из графика $y = P(x)$ сдвигом вниз или совпадает с ним. В частности, $Q(a_3) \le P(a_3) = 0$. Но при $x > b_3$ имеем $Q(x) > 0$. Следовательно, $a_3 \le b_3$.

5. Допустим, не все набрали одинаковое число очков. Пусть занявшие первое место («первые») набрали по K очков, а занявшие последнее место («последние») — по L очков. (Места определяются по очкам, а не по коэффициентам.) Коэффициент «первого» — это сумма K чисел, каждое из которых не меньше L. Значит, этот коэффициент не меньше KL. Аналогично, коэффициент «последнего» — это сумма L чисел, каждое из которых не больше K. Поэтому он не превосходит KL. Если коэффициенты «первого» и «последнего» равны, то они равняются KL. В этом случае каждый «первый» выиграл K встреч у набравших L очков, т.е. у «последних», а каждый «последний» выиграл L встреч у набравших K очков. Если число «первых» больше единицы, то один из них выиграл у другого (не являющегося «последним»). Значит, на первом месте один спортсмен. Аналогично, на последнем месте тоже только один спортсмен. Теперь легко показать, что наличие третьего спортсмена ведет к противоречию.

11 класс

1. Поскольку площадь треугольника ABC равна $AB\cdot BC\cdot CA/4R$, достаточно доказать, что отношение площади треугольника $A'B'C'$ к площади треугольника ABC равно

$$\frac{AB'\cdot BC'\cdot CA' + AC'\cdot CB'\cdot BA'}{AB\cdot BC\cdot CA}.$$

Обозначим $AB'/AB = x$, $BC'/BC = y$ и $CA'/CA = z$. Тогда отношения площадей треугольников $AB'C'$, $A'BC'$ и $A'B'C$ к площади треугольника ABC равны, соответственно, $x(1-y)$, $y(1-z)$ и $z(1-x)$. Поэтому для решения задачи достаточно проверить тождество

$$1-x(1-y)-y(1-z)-z(1-x) = xyz + (1-x)(1-y)(1-z).$$

2. Сделаем подстановку $y = \frac{\pi}{2} - x$. Очевидно, $dy = -dx$;

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(\sin x)dx = \int_{\pi/2}^{0} \sin^2\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right)(-1)dy = \int_0^{\pi/2} \sin^2(\cos y)dy.$$

Поскольку $\cos^2(\cos x) + \sin^2(\cos x) = 1$, имеем

$$\int_0^{\pi/2} \left(\cos^2(\cos x) + \sin^2(\sin x)\right)dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\cos^2(\cos x) + \sin^2(\cos x)\right)dx = \int_0^{\pi/2} dx = \pi/2.$$

3. Заметив, что $f_2(x) - f_3(x) = 2x - 1$, получаем

$$\frac{1}{x} = f_1(x) - \frac{1}{2}\left(f_2(x) - f_3(x) + 1\right).$$

Поскольку операция деления отсутствует, выразить $1/x$ только через f_2 и f_3 невозможно: нельзя получить x в знаменателе. Обойтись без функции f_2 тоже нельзя. В самом деле, производные функций f_1 и f_3 в точке $x = 1$ равны нулю, а производная функции $1/x$ в этой точке отлична от нуля. Доказать необходимость функции f_3 можно, используя комплексные числа: $f_1(i) = i + \frac{1}{i} = i - i = 0$, $f_2(i) = i^2 = -1$. А выразить при помощи операций задачи мнимое число $1/i = -i$ через вещественные числа нельзя.

4. Если провести через середины ребер правильного тетраэдра плоскости, параллельные граням, то тетраэдр будет разбит на четыре тетраэдра и правильный октаэдр (рис.5). Если через точки, делящие ребра тетраэдра на N равных частей, провести плоскости, параллельные граням, то тетраэдр будет разрезан на правильные тетраэдры и октаэдры (с ребром a, составляющим $1/N$ часть ребра исходного тетраэдра). В самом деле, рассмотрим слой между $(n-1)$-й и n-й плоскостями, параллельными (горизонтальному) основанию ($n \le N$). Плоскости, параллельные наклонным граням, делят треугольник — сечение n-й плоскостью — на равные правильные треугольники со сторонами a. Раскрасим их в шахматном порядке так, что треугольники у вершин — черные (рис.6). Интересующий нас слой разбит на следующие многогранники: тетраэдры, стоящие на черных треугольниках; октаэдры, уложенные на белые треугольники (так же, как на рисунке 5); тетраэдры, уложенные вершиной вниз над каждой внутренней точкой треугольной сетки рисунка 6. Взяв $N > 100$, получим нужное разбиение. Его можно опи-