10 КЛАСС

1. Существует ли выпуклое тело, отличное от шара, ортогональные проекции которого на некоторые три попарно перпендикулярные плоскости являются кругами?

А.Канель-Белов

2. Докажите, что среди четырехугольников с заданными длинами диагоналей и заданным углом между ними наименьший периметр имеет параллелограмм.

Фольклор

3. а) Каждую сторону четырехугольника в процессе обхода по часовой

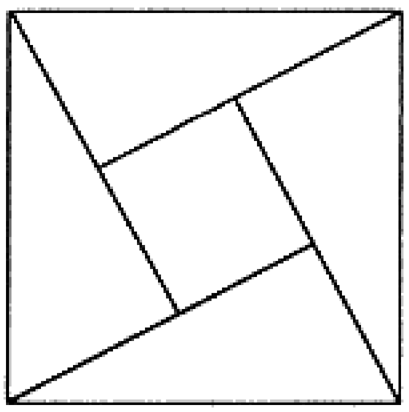

Рис. 7

стрелке продолжили на ее длину (рис.7). Оказалось, что новые концы построенных отрезков служат вершинами квадрата. Докажите, что исходный четырехугольник — квадрат.

б) Докажите, что если в результате такой же процедуры из некоторого n-угольника получается правильный n-угольник, то исходный n-угольник — правильный.

М.Евдокимов

4. Даны действительные числа

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \text{ и } b_1 \le b_2 \le b_3$$

такие, что

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3,$$

$$a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 = b_1b_2 + b_2b_3 + b_3b_1.$$

Докажите, что если $a_1 \le b_1$, то $a_3 \le b_3$.

К.Фельдман

5. В круговом турнире не было ничьих, за победу присуждалось 1 очко, за поражение — 0. Затем был определен коэффициент каждого участника. Он равнялся сумме очков, набранных теми, кого победил данный спортсмен. Оказалось, что у всех участников коэффициенты равны. Число участников турнира больше двух. Докажите, что все спортсмены набрали одинаковое количество очков.

Б.Френкин

6. См. задачу М1599 «Задачника «Кванта».

11 КЛАСС

1. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки C', A' и B' соответственно. Докажите, что площадь треугольника $A'B'C'$ равна

$$\frac{AB' \cdot BC' \cdot CA' + AC' \cdot CB' \cdot BA'}{4R},$$

где R — радиус описанной окружности треугольника ABC.

А.Заславский

2. Найдите значение интеграла

$$\int_0^{\pi/2} \left(\cos^2(\cos x) + \sin^2(\sin x)\right) dx.$$

М.Вялый

3. На доске написаны три функции:

$$f_1(x) = x + \frac{1}{x},$$

$$f_2(x) = x^2,\ f_3(x) = (x-1)^2.$$

Можно складывать, вычитать и перемножать эти функции (в частности, возводить их в квадрат), умножать их на произвольное число, прибавлять к ним произвольное число, а также проделывать эти операции с полученными выражениями. Получите таким образом функцию $1/x$. Докажите, что если стереть с доски любую из функций f_1, f_2, f_3, то получить $1/x$ невозможно.

М.Евдокимов

4. Можно ли разбить правильный тетраэдр с ребром 1 на правильные тетраэдры и октаэдры, длины ребер каждого из которых меньше $1/100$? (Правильный октаэдр — это выпуклый многогранник, все 8 граней которого — одинаковые правильные треугольники, причем в каждой вершине сходятся четыре грани.)

В.Произволов

5. См. задачу М1597, б) «Задачника «Кванта».

6. См. задачу М1600 «Задачника «Кванта».

Избранные задачи отбора на Российскую олимпиаду

1. Есть n гирь. Известно, что масса каждой — целое число граммов и их общая масса меньше p г. При каком наибольшем p можно с помощью чашечных весов гарантированно определить массу каждой гири? (Можно класть гири на чаши в любых сочетаниях и проводить любое число взвешиваний.) (9)

А.Шаповалов

2. Десять банкиров сидят за круглым столом. У каждого на счете записано действительное число, среди этих чисел есть и положительные, и отрицательные. Банкиры по очереди прибавляют остальным банкирам одну девятую своего (к началу операции) числа, а себе пишут ноль. Докажите, что после десятой операции у банкиров не могут оказаться исходные десять чисел. (9)

А.Ковальджи

3. Ломаная разбивает круг на две равновеликие части. Докажите, что кратчайшая такая ломаная — это диаметр. (9)

Фольклор

4. Для каждого натурального числа n обозначим через A_n множество натуральных чисел, больших 1, дающих при делении на n остаток 1. Назовем число из A_n неприводимым, если оно не представимо в виде произведения двух меньших чисел из A_n. Докажите, что для любого $n > 2$ в A_n найдется число, представимое в виде произведения неприводимых в A_n чисел различными способами. (10)

В.Сендеров

5. Задано натуральное число $n > 3$. Верно ли, что среди всех n-угольников (не только выпуклых) наибольшую сумму синусов внутренних углов имеет правильный? (10)

В.Сендеров

6. Сколько диагоналей можно провести в выпуклом n-угольнике так, чтобы каждая пересекалась не более чем с одной другой? (Совпадение концов диагоналей в вершинах за пересечение не считается.) (11)

А.Шаповалов

7. Центр O описанной окружности четырехугольника $ABCD$ не лежит на диагоналях этого четырехугольника. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, а прямые AD и BC — в точке F.

а) Докажите, что все шесть описанных окружностей треугольников ABF, CDF, BEC, ADE, BOD и AOC пересекаются в некоторой общей точке K.

б) Верно ли, что точка K лежит на прямой EF, а прямые EF и OK перпендикулярны? (11)

А.Заславский

8. Все вершины одного куба лежат на гранях другого куба. Может ли так случиться, что никакая грань первого куба не параллельна никакой грани второго? (11)

В.Произволов

Публикацию подготовили
А.Ковальджи, В.Сендеров, А.Спивак