LX Московская математическая олимпиада

Избранные задачи окружного тура

1. По кругу лежат 5 монет гербом вниз. Разрешается переворачивать одновременно три монеты, лежащие подряд. Можно ли таким способом положить все монеты гербом вверх? (5)[1]

2. Квадрат разрезали на три прямоугольника, два из которых имеют размеры 5×11 и 4×6. Какие размеры может иметь третий прямоугольник? (5)

3. Из доски 4×4 вырезали одну клетку тремя способами (рис.1). Разрежьте одну из получившихся досок на две части так, чтобы из них можно было сложить каждую из двух оставшихся. (6)

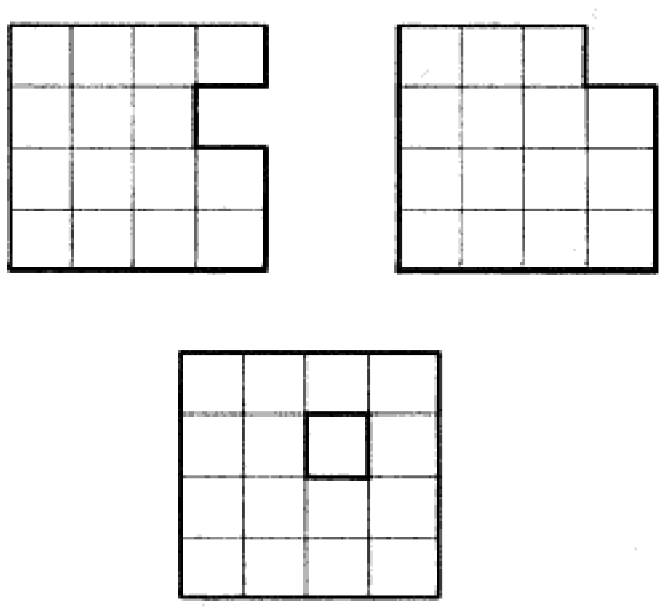

Рис. 1

4. Придумайте число, которое оканчивается на 17, делится на 17 и имеет сумму цифр, равную 17. (6)

5. Найдите значение дроби

$$\frac{В\cdot А\cdot Р\cdot Е\cdot Н\cdot Ь\cdot Е}{К\cdot А\cdot Р\cdot Л\cdot С\cdot О\cdot Н},$$

где разные буквы — это разные цифры, а между буквами стоит знак умножения. (6)

6. Какая дробь больше:

$$\frac{166...6}{66...64} \text{ или } \frac{199...9}{99...95},$$

где в числителях и знаменателях стоят по 1997 одинаковых цифр? (8)

7. Когда обезьяна несла три одинаковых кокосовых ореха на вершину многоэтажного дерева, один орех упал с 11-го этажа и разбился. Обезьяна хочет определить самый высокий этаж, при падении с которого кокосовые орехи не разбиваются. Она может уронить орех с любого этажа и подобрать его, если он цел. Докажите, что ей хватит четырех испытаний (с двумя орехами). (8)

8. Несколько учащихся ушли из лицея и несколько пришли. В результате число учащихся уменьшилось на 10%, а доля мальчиков в лицее увеличилась с 50% до 55%. Увеличилось или уменьшилось число мальчиков? (9)

9. Взяли 100 чисел. Среди их всевозможных произведений по два числа оказались 1000 отрицательных. Сколько среди исходных чисел могло быть нулей? (10)

10. В какое наибольшее число цветов можно раскрасить клетки доски 8×8 так, чтобы у каждой клетки среди ее соседей (по стороне) были хотя бы две клетки, окрашенные в тот же цвет? (10)

11. Существуют ли два последовательных натуральных числа, сумма цифр каждого из которых делится на 1997? (11)

12. Около правильного тетраэдра $ABCD$ описана сфера. На его гранях как на основаниях во внешнюю сторону построены правильные пирамиды $ABCD'$, $ABDC'$, $ACDB'$, $BCDA'$, вершины которых лежат на этой сфере. Найдите угол между плоскостями ABC' и ACD'. (11)

[1] *В скобках указан класс, в котором предлагалась задача.*

Городская олимпиада

Математический праздник (февраль 1997 года)

6 КЛАСС

1. Витя выложил из карточек пример на сложение и затем поменял местами две карточки. Как видите, равенство нарушилось (рис.2). Какие карточки переставил Витя?

В.Замков

$$\begin{array}{r} 314159 \\ +\,291828 \\ \hline 585787 \end{array}$$

Рис. 2

2. В папирусе Ринда (Древний Египет) среди прочих сведений содержатся разложения дробей в сумму дробей с числителем 1, например,

$$\frac{2}{73}=\frac{1}{60}+\frac{1}{219}+\frac{1}{292}+\frac{1}{x}.$$

Один из знаменателей здесь заменен буквой x. Найдите этот знаменатель.

А.Спивак

3. В корзине лежат 30 грибов — рыжиков и груздей. Известно, что среди любых 12 грибов имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 20 грибов — хотя бы один груздь. Сколько рыжиков и сколько груздей в корзине?

А.Галочкин

4. Разрежьте изображенную на рисунке 3 доску на 4 одинаковые части так, чтобы каждая из них содержала 3 заштрихованные клетки.

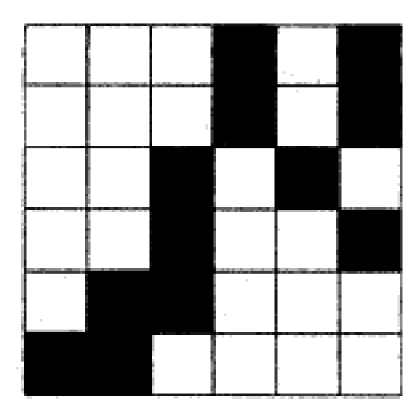

Рис. 3

Фольклор

5. Придумайте такую раскраску граней кубика, чтобы в трех различных положениях он выглядел, как показано на рисунке 4. (Укажите, как раскрасить невидимые грани, или нарисуйте развертку.)

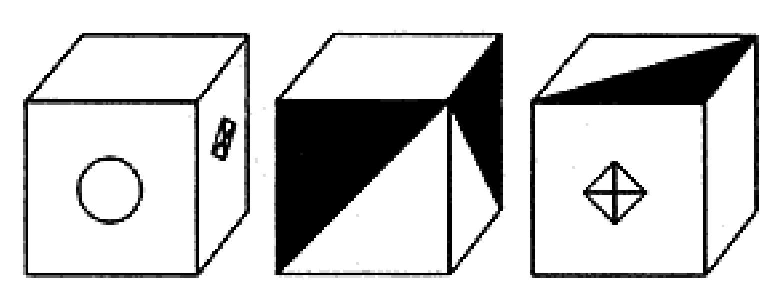

Рис. 4

Фольклор

6. Семья ночью подошла к мосту. Папа может перейти его за 1 минуту,