Задача 13. *Укажите все точки плоскости $(x; y)$, через которые не проходит ни одна из кривых семейства*

$$y=p^2+(4-2p)x-x^2.$$

Решение. Уравнение кривой является квадратным относительно p:

$$p^2-2px+4x-x^2-y=0.$$

Если через точку $(x_0; y_0)$ проходит хотя бы одна кривая, то это уравнение имеет корни и, следовательно, дискриминант его — а это функция от x и y — неотрицателен. Искомые же точки удовлетворяют условию $D<0$.

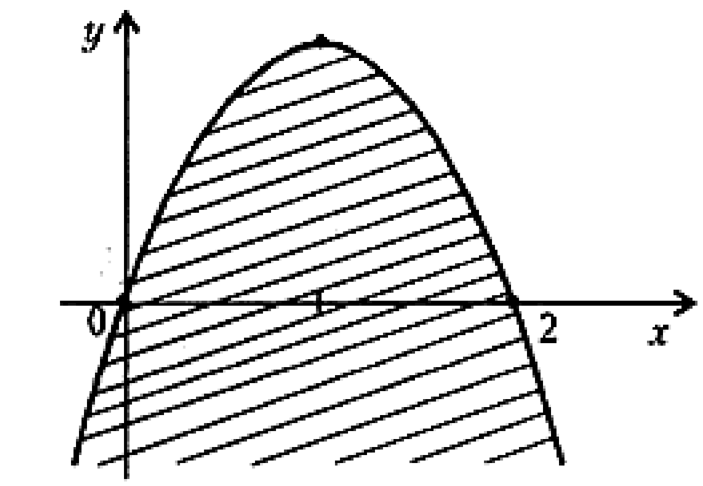

Рис. 1

Вычисляя дискриминант (точнее, $D/4$), получаем неравенство

$$x^2-4x+x^2+y<0,$$

откуда

$$y<4x-2x^2.$$

Итак, все удовлетворяющие условию точки лежат под параболой $y=4x-2x^2$ (рис.1).

Исследование уравнений средствами анализа

Сейчас мы обсудим задачи, сравнительно далекие от задач вступительного экзамена. Однако надеемся, что наших читателей методы их решения могут заинтересовать.

Задача 14. *Для каждого значения параметра a выясните, сколько корней имеет уравнение*

$$x^3-ax+2=0.$$

Решение. Выразим a через x:

$$a=\frac{x^3+2}{x}=x^2+\frac{2}{x}$$

и исследуем функцию в правой части с помощью производной:

$$\left(x^2+\frac{2}{x}\right)'=2x-\frac{2}{x^2}=\frac{2\left(x^3-1\right)}{x^2}.$$

Мы видим, что функция убывает при $x<0$ и $0<x<1$, возрастает при $x\geq 1$ и имеет при $x=1$ локальный минимум. Построив ее график (рис.2),

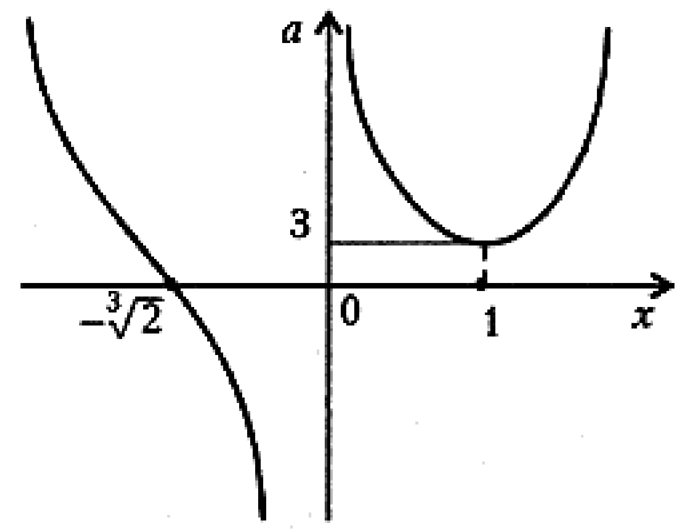

Рис. 2

видим, что при $a<3$ уравнение имеет один корень, при $a=3$ — два корня, при $a>3$ — три корня.

Задача 15. *При каких значениях a имеет корень уравнение*

$$\log_a x=x$$

(иначе говоря, при каких основаниях системы логарифмов существуют числа, равные своему логарифму)?

Решение. Ясно, что $a>0$, $a\neq 1$ и уравнение эквивалентно такому:

$$\frac{\ln x}{\ln a}=x,$$

или

$$\ln a=\frac{\ln x}{x}.$$

Исследуем функцию, стоящую в правой части уравнения. При $x\to+\infty$ имеем $\frac{\ln x}{x}\to 0$, а так как

$$\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{1-\ln x}{x},$$

функция убывает при $1-\ln x<0$, т.е. при $x>e$, возрастает при $0<x<e$, так

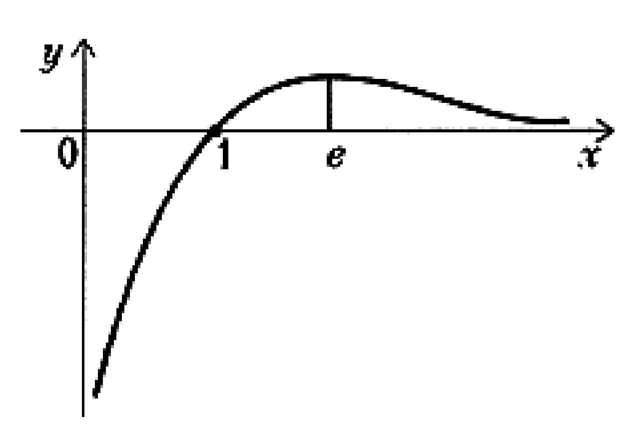

Рис. 3

что график ее имеет вид, показанный на рисунке 3, а уравнение имеет корень при $\ln a\leq 1/e$, т.е. при $1<a\leq e^{1/e}$ и $0<a<1$.

Ответ. $0<a<1$, $1<a\leq e^{1/e}$.

В заключение рекомендуем прорешать следующие задачи.

Упражнения

1. Решите уравнения

а) $ax^3+\left(a^2-2\right)x^2-ax-2=0$;

б) $\left(8a^2+1\right)\sin^3 x-\left(4a^2+1\right)\sin x+2a\cos^3 x=0$;

в) $x^3-\left(\sqrt{2}+1\right)x^2+2=0$;

г) $\sqrt{a+\sqrt{a-x}}=x$;

д) $\frac{a^3+x^3}{2}=\sqrt[3]{2a-x^3}$.

2. При каких значениях a уравнение

$$\left(2x^2-a\right)^2-24x^2+16x+4a=0$$

имеет а) три корня; б) четыре корня?

3. При каких значениях a уравнение

$$4a^3x^4+4a^2x^2+32x+a+8=0$$

имеет два корня?

4. Решите системы уравнений

а) $\begin{cases}\frac{a}{x}-\frac{b}{z}+xz=c,\\ \frac{b}{y}-\frac{c}{x}+xy=a,\\ \frac{c}{z}-\frac{a}{y}+yz=b;\end{cases}$

б) $\begin{cases}x^2+y^2=bx+ay-cz,\\ y^2+z^2=-ax+cy+bz,\\ z^2+x^2=cx-by+az.\end{cases}$

5. Решите неравенство

$$a^3x^4+6a^2x^2-x+9a+3\geq 0$$

для каждого $a\geq 0$.

6. На плоскости $(x; y)$ укажите все точки, через которые проходит хотя бы одна кривая семейства

$$y=p^2+(2p-1)x+2x^2.$$

7. Изобразите часть плоскости, покрываемую всевозможными кругами вида

$$(x-a)^2+(y-a)^2\leq 2+a^2.$$

8. Найдите все значения p, при каждом из которых множество решений неравенства

$$\left(p-x^2\right)(p+x-2)<0$$

не содержит ни одного решения неравенства $x^2\leq 1$.

9. Найдите все значения a, при которых неравенство

$$a(4-\sin x)^4-3+\cos^2 x+a>0$$

выполняется при всех x.

10. Найдите все значения a, при которых функция

$$y(x)=a\sin 7x+8ax+\sin 4x-5$$

убывает и не имеет критических точек ни при каких x.

11. Найдите все значения x, удовлетворяющие неравенству

$$(2-a)x^3+(1-2a)x^2-6x+5+4a-a^2<0$$

хотя бы при одном значении $a\in[-1;2]$.

12. Для каждого значения параметра a определите число корней уравнения

а) $ax^3-x+2=0$;

б) $(x+1)^4=ax^3$;

в) $e^x=ax$;

г) $e^x=ax^2$.