равенство

$$x^4+2ax^3+a^2x^2-1\le 0.$$

Решение. Заметим, что $x=0$ является решением при любом a. Рассмотрим левую часть неравенства как квадратный трехчлен относительно a и попробуем выразить его корни через x, т.е. решим относительно a уравнение

$$f(a,x)=a^2x^2+2ax^3+x^4-1=0.$$

Получаем

$$a=\frac{-x^3\pm\sqrt{x^6-x^6+x^2}}{x^2}=\frac{-x^3\pm x}{x^2},$$

т.е.

$$a=-\frac{x^2+1}{x} \text{ или } a=-\frac{x^2-1}{x}.$$

Это дает возможность разложить на множители квадратный трехчлен $f(a,x)$:

$$f(a,x)=x^2\left(a+\frac{x^2+1}{x}\right)\left(a+\frac{x^2-1}{x}\right)=$$

$$=\left(x^2+ax+1\right)\left(x^2+ax-1\right).$$

Осталось решить неравенство

$$\left(x^2+ax+1\right)\left(x^2+ax-1\right)\le 0.$$

Первый множитель положителен при всех x (напомним, что $|a|<2$), так что исходное неравенство эквивалентно неравенству

$$x^2+ax-1\le 0.$$

Находим корни уравнения

$$x^2+ax-1=0,$$

после чего получаем

Ответ.

$$\frac{-a-\sqrt{a^2+4}}{2}\le x\le\frac{-a+\sqrt{a^2+4}}{2}.$$

Мы решили исходное неравенство, ограничив значения параметра условием $|a|<2$, для того чтобы не загромождать решение техническими деталями. Настоятельно рекомендуем читателям решить эту задачу, как и следующую, без ограничений на a, т.е. при всех вообще a.

Задача 9. *Для каждого неотрицательного a решите неравенство*

$$16a^3x^4+8a^2x^2+16x+a+4\ge 0.$$

Решение. При $a=0$ неравенство справедливо при $x\ge -1/4$. Многочлен в левой части — кубический по a и четвертой степени по x. Выполнив замену $y=2ax$ при $a\ne 0$, получаем

$$\frac{y^4}{a}+2y^2+\frac{8y}{a}+a+4\ge 0,$$

или ($a>0$!)

$$a^2+2a\left(y^2+2\right)+y^4+8y\ge 0.$$

Неравенство стало квадратичным относительно a!

Действуем, как при решении предыдущей задачи:

$$a^2+2a\left(y^2+2\right)+y^4+8y=0,$$

имеем

$$a=-\left(y^2+2\right)\pm\sqrt{\left(y^2+2\right)^2-y^4-8y}=$$

$$=-\left(y^2+2\right)\pm(2y-2),$$

т.е.

$$a=-y^2+2y-4$$

либо

$$a=-y^2-2y.$$

Неравенство приводится к виду

$$\left(y^2-2y+a+4\right)\left(y^2+2y+a\right)\ge 0.$$

При $a>0$ первый сомножитель положителен. Осталось решить неравенство

$$y^2+2y+a\ge 0$$

и перейти к переменной x.

Ответ. $[-1/4;+\infty)$ при $a=0$;

$$\left(-\infty;-\frac{\sqrt{1-a}+1}{2a}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{1-a}-1}{2a};+\infty\right)$$

при $0<a<1$; $(-\infty;+\infty)$ при $a\ge 1$.

Задачи, связанные с исследованием функций

Задача 10. *При каких значениях a неравенство*

$$5a-5+\sin^2x+a(3-\cos x)^3>0$$

выполняется при всех x?

Решение. Перепишем неравенство:

$$a\left(5+(3-\cos x)^3\right)>5-\sin^2x.$$

Так как коэффициент при a положителен, оно эквивалентно такому:

$$a>\frac{5-\sin^2x}{5+(3-\cos x)^3}.$$

Правая часть есть дробь, числитель которой максимален при $\sin x=0$, а знаменатель минимален при $\cos x=1$, т.е. при $x=2k\pi$. Подставляя эти значения x, получаем $a>5/13$.

Ответ. $a>5/13$.

Задача 11. *При каких значениях a функция*

$$y=8ax-a\sin 6x-7x-\sin 5x$$

возрастает и не имеет критических точек на всей прямой?

Решение. Мы должны выяснить, при каких a производная данной функции положительна при всех x. Иначе говоря, при каких a неравенство

$$8a-6a\cos 6x-7-5\cos x>0$$

выполняется при всех x. Решая неравенство относительно a, получаем эквивалентное неравенство .

$$a>\frac{7+5\cos 5x}{8-6\cos 6x}.$$

Числитель дроби в правой части принимает максимальное значение, если $\cos 5x=1$, а знаменатель минимален при $\cos 6x=1$. При $x=2\pi k$ и $\cos 5x=1$, и $\cos 6x=1$, так что

$$a>\frac{12}{2}=6.$$

Ответ. $a>6$.

В следующих задачах существенно используются свойства квадратичных функций.

Задача 12. *Найдите все значения x, удовлетворяющие неравенству*

$$(a+2)x^3-(1+2a)x^2-6x+a^2+4a-5>0$$

хотя бы при одном значении $a\in[-2;1]$.

Решение. Левая часть неравенства — кубический многочлен относительно x и квадратный трехчлен относительно a:

$$f(a)=a^2+a\left(x^3-2x^2+4\right)+$$

$$+2x^3-x^2-6x-5.$$

Для того чтобы квадратный трехчлен со старшим коэффициентом 1 был положителен хотя бы при одном значении аргумента, принадлежащем некоторому отрезку, необходимо и достаточно, чтобы его значение хотя бы в одном из концов отрезка было положительно. В самом деле, если функция

$$y=f(t)=t^2+pt+q$$

неположительна на концах отрезка $[\alpha;\beta]$, т.е. $f(\alpha)\le 0$ и $f(\beta)\le 0$, то $f(t)\le 0$ при всех $t\in[\alpha;\beta]$. Если же, скажем, $f(\alpha)>0$, то $f(t)>0$ в точках отрезка, достаточно близких к α. Аналогично, если $f(\beta)>0$, то и $f(t)>0$ в точках, достаточно близких к β.

Итак, искомые значения x удовлетворяют совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l}x^2-2x-3>0,\\ x^3-x^2-2x>0,\end{array}\right.$$

решая которую, получаем

Ответ. $(-\infty;-2)\cup(0;1)\cup(1;+\infty)$.