Решая относительно a квадратное уравнение, получим

$$a=x^2+x+1$$

либо

$$a=x^2-x.$$

Первое из полученных уравнений противоречит ограничениям. Для его неотрицательных корней $x^2>a$ (поскольку $x\geq 0$).

Второе уравнение не имеет корней при $a<-1/4$, а при $-1/4\leq a<0$ не имеет корней, удовлетворяющих исходному уравнению. При $a=0$ имеем $x=0$, а при $a>0$ единственным неотрицательным корнем, удовлетворяющим всем условиям, будет

$$x=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

Ответ. $x=0$ при $a=0$; $x=\left(1+\sqrt{1+4a}\right)/2$ при $a>0$; при $a<0$ корней нет.

Задача 5. *Решите уравнение*

$$a^7+x=\sqrt[7]{a-x}.$$

Решение. Перепишем уравнение таким образом:

$$a=\sqrt[7]{\sqrt[7]{a-x}-x}.$$

При фиксированном x рассмотрим функцию

$$f(a)=\sqrt[7]{a-x}.$$

Наше уравнение, как нетрудно видеть, можно записать и так:

$$a=f(f(a)). \qquad (3)$$

При любом фиксированном x функция $y=f(a)$ является возрастающей.

Докажем, что уравнение (3) равносильно уравнению

$$a=f(a).$$

Прежде всего, всякий корень последнего уравнения является корнем уравнения (3); ибо если

$$a=f(a),$$

то

$$f(a)=f(f(a))$$

и, значит,

$$a=f(f(a)).$$

Пусть a_0 — корень уравнения (3), причем $a_0\neq f(a_0)$. Если $a_0>f(a_0)$, из возрастания функции следует, что

$$f(a_0)>f(f(a_0))=a_0,$$

т.е.

$$f(a_0)>a_0,$$

что противоречит нашему предположению.

Аналогично доказывается невозможность неравенства

$$a_0<f(a_0).$$

Итак, поскольку в нашем случае $a=f(a)$, получаем эквивалентное уравнение

$$a=\sqrt[7]{a-x},$$

откуда следует, что

$$x=a-a^7.$$

Ответ. $a-a^7$.

Вот еще одна задача без параметра, при решении которой вводится параметр.

Задача 6. *Решите уравнение*

$$\sqrt{35-2\sqrt{45-2x}}=x-5.$$

Решение. Пусть $y=\sqrt{45-2x}$. Тогда $x=\dfrac{45-y^2}{2}$ и уравнение приводится к виду

$$2\sqrt{35-2y}=35-y^2.$$

Возведение в квадрат приведет к жуткому уравнению четвертой степени.

Положим $35=a$ (решим уравнение относительно 35); тогда

$$2\sqrt{a-2y}=a-y^2;$$

решая относительно a, получаем либо

$$a=y^2+2y,$$

либо

$$a=y^2-2y-4,$$

т.е. два уравнения

$$y^2+2y-35=0,\ y^2-2y-39=0.$$

Первое из уравнений имеет корни -7 и 5, из которых годится только $y=5$. При этом $x=10$.

Квадрат неотрицательного корня второго уравнения больше 35, так что и он не удовлетворяет уравнению.

Ответ. $x=10$.

Системы уравнений

Здесь мы разберем одну задачу, предлагавшуюся на вступительных экзаменах в НГУ.

Задача 7. *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} y+z=(b+c)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right),\\ x+z=(a+c)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right),\\ x+y=(a+b)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)\end{cases}$$

при $(a+b)(b+c)(a+c)\neq 0$.

Решение. Пусть $u=1/x+1/y+1/z$. Заметим, что $u\neq 0$. В самом деле, если $u=0$, то $x=y=z=0$, что невозможно.

Решим относительно параметров a, b, c систему

$$\begin{cases}(b+c)u=y+z,\\(a+c)u=x+z,\\(a+b)u=x+y.\end{cases}$$

Сложив уравнения системы, получаем

$$(a+b+c)u=x+y+z. \qquad (4)$$

Последовательно вычитая из (4) уравнения системы, имеем

$$\begin{cases}au=x,\\bu=y,\\cu=z.\end{cases} \qquad (5)$$

Если $abc=0$, система не имеет решений с ненулевыми x, y, z. Далее считаем, что $abc\neq 0$.

Из (5) следует, что

$$\frac{u}{x}=\frac{1}{a},\ \frac{u}{y}=\frac{1}{b},\ \frac{u}{z}=\frac{1}{c}$$

и

$$u\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=u^2=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c};$$

если

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>0,$$

то

$$u=\pm\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}},$$

после чего без труда получаем

Ответ. $(au,\ bu,\ cu)$, где $u=\pm\sqrt{1/a+1/b+1/c}$ при $1/a+1/b+1/c>0$. При других (a, b, c) решений нет.

Задачи, связанные с неравенствами

Сказанное ранее вполне может быть отнесено и к решению неравенств.

Задача 8. *При каждом значении параметра a, $|a|<2$, решите данное не-*