Решим относительно параметра

А. ЕГОРОВ

В ЭТОЙ статье пойдет речь об одном приеме, оказывающемся весьма плодотворным при решении задач с параметром. Такие задачи довольно часто встречаются на вступительных экзаменах в вузы, предъявляющие повышенные требования к математической подготовке абитуриентов. Большая часть разбираемых задач предлагалась на конкурсных экзаменах в такие вузы, как МГУ, МАИ, НГУ и др.

Как правило, решая задачу с параметром, мы рассматриваем его как некоторое произвольное, но фиксированное постоянное число и решаем уравнение, неравенство, систему относительно имеющихся неизвестных, учитывая естественно возникающие ограничения на значения параметра.

Однако в целом ряде случаев (например, при решении уравнений) бывает удобно рассматривать параметр как независимую переменную и решать уравнение относительно этой переменной.

Уравнения, квадратные относительно параметра

В следующих задачах требуется решать уравнение третьей и четвертой степени. В нашем распоряжении нет хороших формул для решения таких уравнений, а угадать корень и разложить на множители при наличии параметра не очень просто.

Однако бывает, что эти уравнения оказываются квадратными относительно параметра.

Задача 1. *Решите уравнение*

$$2x^3-(a+2)x^2-ax+a^2=0.$$

Решение. Данное уравнение — квадратное относительно a:

$$a^2-a\left(x^2+x\right)+2x^3-2x^2=0,$$

его дискриминант

$$D=\left(x^2+x\right)^2-8x^3+8x^2=x^2(x-3)^2$$

— полный квадрат. Поэтому

$$a=\frac{x^2+x\pm x(x-3)}{2},$$

так что либо

$$a=x^2-x,$$

либо

$$a=2x,$$

т.е. либо $x=a/2$, либо $x=\left(1\pm\sqrt{1+4a}\right)/2$. Учитывая условия существования корней, получаем

Ответ. $x=a/2$ при $a<-1/4$; $x_1=-1/8$, $x_2=1/2$ при $a=-1/4$; $x_1=a/2$, $x_{23}=\left(1\pm\sqrt{1+4a}\right)/2$ при $a>-1/4$, $a\neq 0$, $a\neq 6$; $x_1=0$, $x_2=1$ при $a=0$; $x_1=-2$, $x_2=3$ при $a=6$.

Задача 2. *При каких a уравнение*

$$(x_2-a)^2-6x^2+4x+2a=0$$

имеет три корня?

Решение. Мы снова имеем дело с квадратным относительно a уравнением:

$$a^2-2a\left(x^2-1\right)+x^4-6x^2+4x=0.$$

Вычисляя его дискриминант, получаем

$$\frac{D}{4}=\left(x^2-1\right)^2-\left(x^4-6x^2+4x\right)=(2x-1)^2,$$

поэтому либо

$$x^2-2x-a=0, \qquad (1)$$

либо

$$x^2+2x-2-a=0. \qquad (2)$$

Выясним, при каких a совокупность уравнений (1) и (2) имеет три решения.

Это возможно в трех случаях: одно из уравнений имеет один корень, а другое — два корня, отличных от корней первого уравнения; уравнения (1) и (2) имеют по 2 корня, один из которых — общий для этих двух уравнений.

Первое уравнение имеет один корень, когда

$$\frac{D}{4}=1+a=0,$$

т.е. при $a=-1$. При этом второе уравнение имеет корни $1\pm\sqrt{2}$.

Второе уравнение имеет один корень при $a=-3$, но при этом первое корней не имеет.

Наконец, если уравнения (1) и (2) имеют общий корень, то

$$x^2-2x=x^2+2x-2,$$

т.е. $x=1/2$, при этом $a=-3/4$.

Ответ. При $a=-1$ и $a=-3/4$.

В следующей задаче нет параметра. Однако удачное превращение данного уравнения в уравнение с параметром дает возможность найти решение. Правда, прием используется весьма искусственный — за параметр по существу принимается конкретное число.

Задача 3. *Решите уравнение*

$$x^4-2\sqrt{3}x^2+x+3-\sqrt{3}=0.$$

Решение. Заменив в уравнении $\sqrt{3}$ на a, получим квадратное относительно a уравнение

$$x^4-2ax^2+x+a^2-a=0,$$

т.е.

$$a^2-a\left(2x^2+1\right)+x^4+x=0.$$

Решая его относительно a, получаем

$$a=\frac{2x^2+1\pm(2x-1)}{2},$$

т.е. либо

$$x^2+x=a,$$

либо

$$x^2-x+1=a.$$

Подставляя $a=\sqrt{3}$, решаем полученные уравнения.

Ответ.

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\sqrt{3}}}{2},$$

$$x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2}.$$

Иррациональные уравнения с параметром

Задача 4. *Решите уравнение*

$$\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x.$$

Решение. Избавление от радикалов приведет к уравнению четвертой степени относительно x. Поэтому попробуем решить уравнение относительно a.

Заметим, что $x\geq 0$. Избавляясь от радикалов, приходим к уравнению

$$a^2-a\left(2x^2+1\right)+x^4-x=0,$$

решить которое мы должны при дополнительных ограничениях

$$x\geq 0 \text{ и } x^2\leq a.$$