Под каким углом отскочит мяч?

С.ХОРОЗОВ

В ОБЩЕМ случае задача формулируется так. Мяч подлетает к плоскому массивному телу (бетонная стена, горизонтальная асфальтированная площадка и т.п.) под некоторым углом. При этом мяч может вращаться с некоторой угловой скоростью вокруг произвольной оси. Под каким углом он отскочит?

Несколько сузим задачу — рассмотрим случай, когда ось вращения мяча перпендикулярна плоскости его падения на стену. Привычное «угол падения равен углу отражения» придется отбросить, если мы не хотим ограничиваться тривиальным случаем, когда трения нет. Решая задачу, будем предполагать, что составляющая скорости мяча, перпендикулярная стене, в процессе столкновения меняет только знак, но не меняет своей абсолютной величины, и что учет силы тяжести не оказывает сколько-нибудь заметного влияния на ответ. Второе предположение вполне обоснованно: оценка времени отскока мяча дает несколько сотых долей секунды; это значит, что упругие силы в момент удара приблизительно на два порядка превосходят силу тяжести.

Обсудим сначала частный случай задачи: мяч со скоростью v_0 подлетает к стене под углом 90° к ее поверхности, вращаясь с угловой скоростью ω_0 вокруг оси, параллельной стене. Пусть $N(t)$ — зависимость от времени силы упругой реакции стены. Время будем отсчитывать от момента, когда мяч пришел в соприкосновение со стеной. Если μ — коэффициент трения скольжения мяча по стене, то в момент времени t составляющая скорости мяча, параллельная стене, определяется формулой

$$v_x(t) = \frac{\mu}{m}\int_0^t N(t)\,dt,$$

где m — масса мяча. Зависимость от времени угловой скорости мяча дается формулой

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{\mu R}{I}\int_0^t N(t)\,dt,$$

где R — радиус мяча, а I — его момент инерции (мы предполагаем, что удар не очень сильный и деформация мяча мала по сравнению с его радиусом). Записанные формулы справедливы только до момента времени τ, в который закончится проскальзывание мяча по поверхности стены, — ведь мы воспользовались законом, справедливым только для силы трения скольжения. Интуитивно ясно, что при малых значениях коэффициента трения μ проскальзывание может продолжаться в течение всего времени отскока (времени, в течение которого мяч находится в контакте со стеной), а при больших значениях μ проскальзывание может прекратиться, когда мяч еще прижат к стене. Это значит, что в момент времени τ, когда проскальзывание прекратилось,

$$v_x(\tau) = R\omega(\tau)$$

и мяч начинает просто катиться по стене. Потерями энергии мяча в процессе качения мы будем пренебрегать. Следовательно, начиная с момента времени τ, угловая скорость и x-составляющая скорости мяча постоянны. Подставив в последнее равенство выражения для v_x и ω, получим

$$\int_0^\tau N(t)\,dt = \frac{\omega_0 R}{\frac{\mu}{m} + \frac{\mu R^2}{I}}.$$

Запишем момент инерции мяча в виде $I = \gamma m R^2$, где $\gamma = 2/5$, если мяч сплошной и однородный, и $\gamma = 2/3$, если мяч — надутая воздухом массивная оболочка (например, футбольный мяч). Тогда

$$\int_0^\tau N(t)\,dt = \frac{\omega_0 R m\gamma}{\mu(\gamma+1)}.$$

Рассмотрим теперь вопрос о том, в каких случаях время проскальзывания τ меньше времени T контакта мяча со стеной и в каких случаях — больше. Условие, что проскальзывание прекратилось не позже, чем мяч перестал касаться стены, можно записать в виде

$$\int_0^T N(t)\,dt \ge \int_0^\tau N(t)\,dt,$$

или, поскольку левая часть есть просто изменение перпендикулярной к стене составляющей импульса мяча, которое, в соответствии со сделанным в начале предположением, равно $2mv_0$,

$$2mv_0 \ge \int_0^\tau N(t)\,dt = \frac{\omega_0 R m\gamma}{\mu(\gamma+1)}.$$

Отсюда получаем

$$\mu \ge \frac{\omega_0 R\gamma}{2v_0(\gamma+1)} = \mu_к.$$

Если μ больше $\mu_к$ (критическое значение коэффициента трения), то время проскальзывания мяча по стене меньше времени T контакта мяча со стеной, а если μ не больше $\mu_к$, то проскальзывание будет длиться в течение всего соударения. При $\mu \ge \mu_к$ для составляющей скорости, параллельной стене, и угла отскока α_1 имеем

$$v_x = v_x(\tau) = \frac{\omega_0 R\gamma}{v_0(\gamma+1)},\ \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\omega_0 R\gamma}{v_0(\gamma+1)},$$

а при $\mu \le \mu_к$

$$v_x = v_x(T) = 2\mu v_0,\ \operatorname{tg}\alpha_1 = 2\mu.$$

В частном случае, когда сплошной мяч (шар) катится по горизонтальной поверхности и сталкивается с вертикальной стеной, $\omega_0 R = v_0$ и $\mu_к = 1/7$, поэтому при $\mu \ge \mu_к$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\gamma}{\gamma+1} = \frac{2}{7},\ \alpha_1 \approx 15{,}9°.$$

Мы получили интересное предсказание — независимо от массы, радиуса, скорости сплошного мяча и коэффициента трения его о поверхность стены угол отскока мяча не превосходит 16°.

Теперь рассмотрим, как и намеревались, более общий случай — мяч подлетает к стене под углом $\alpha_0 \ne 0$, вращаясь с угловой скоростью ω_0 вокруг оси, перпендикулярной плоскости падения (рис.1). Будем по-прежнему считать

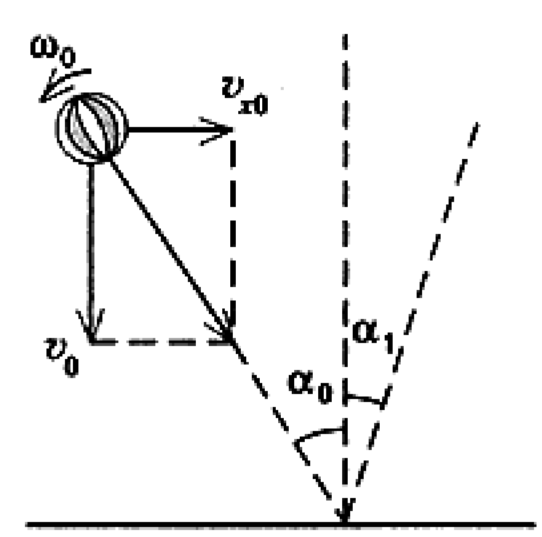

Рис. 1

составляющую скорости, перпендикулярную стене, равной v_0. Тогда составляющая начальной скорости, параллельная стене, равна $v_{x0} = v_0\operatorname{tg}\alpha_0$.