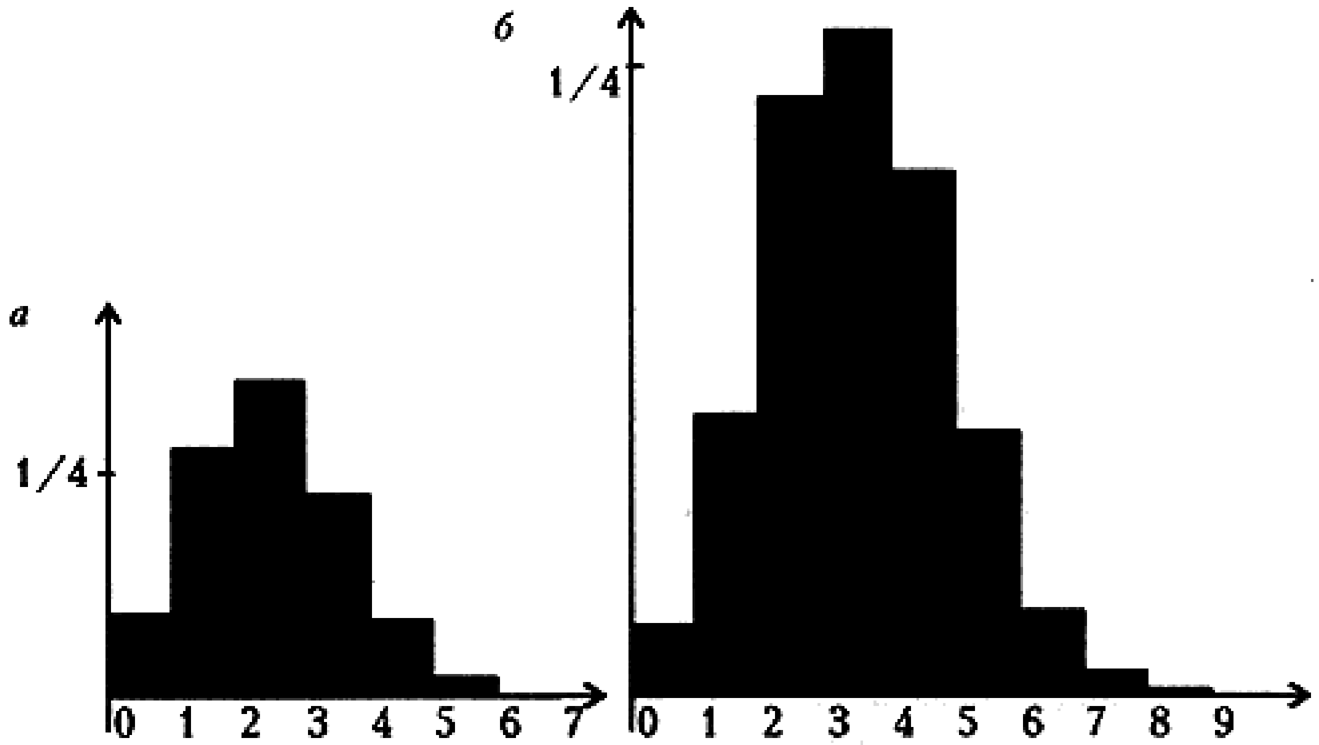

Рис. 7

35. Докажите, что если всегда $X \le Y$, то $\mathbf{M}(X) \le \mathbf{M}(Y)$.

36. Докажите, что если $\mathbf{M}(X^2) = \mathbf{M}(X)^2$, то X — постоянная величина.

37. Феде на экзамене задают а) 6; б) 9 вопросов, на каждый из которых он отвечает правильно с вероятностью $1/3$. Найдите вероятности, что он ответит правильно на k вопросов (соответствующие гистограммы изображены на рис.7, *а,б*).

Дисперсия и неравенство Чебышёва. Закон больших чисел

Кроме среднего значения $\mathbf{M}(X)$, случайная величина имеет другие характеристики. Если мы знаем, что в среднем за час на остановку приходит 10 автобусов, то отсюда еще не следует, что нам не придется ждать автобуса полчаса. Рассмотрим случайную величину $\hat{X} = X - \mathbf{M}(X)$ — отклонение X от математического ожидания (чем большие по модулю значения она имеет, тем больше «разброс» величины X).

Разумеется, математическое ожидание величины $\hat{X}$ равно 0. Математическое ожидание ее модуля может служить мерой разброса значений X. Но для математиков значительно более удобна другая характеристика, которую называют *дисперсией*:

$$\mathbf{D}(X) = \mathbf{M}(\hat{X})^2 = \mathbf{M}(X - \mathbf{M}(X))^2.$$

Дисперсия — это *квадрат* «характерного уклонения» величины X от ее среднего значения. Чем меньше дисперсия, тем острее (уже) гистограмма распределения.

38. Докажите, что

$$\mathbf{D}(X) = \mathbf{M}(X^2) - \mathbf{M}(X)^2.$$

А теперь — самое замечательное свойство дисперсии.

Теорема 3. *Дисперсия суммы независимых случайных величин X и Y равна сумме их дисперсий:*

$$\mathbf{D}(X + Y) = \mathbf{D}(X) + \mathbf{D}(Y).$$

39. Докажите эту теорему.

Теорема 3 верна, конечно, и для суммы нескольких независимых случайных величин. Отсюда ясно, что для n одинаково распределенных независимых величин (например, для числа единиц схемы Бернулли) дисперсия их суммы равна $n\mathbf{D}$, где $\mathbf{D}$ — дисперсия одной величины. Значит, характерное уклонение суммы n случайных значений от ее математического ожидания равно $\sqrt{n\mathbf{D}}$ («закон корня из n»), тем самым, среднее арифметическое n значений отличается от вероятности p на величину порядка $\sqrt{\mathbf{D}}/\sqrt{n}$. На этом и строится доказательство закона больших чисел.

Докажите самостоятельно следующие утверждения:

40. Дисперсия величины Z схемы Бернулли равна $np(1-p)$.

Теорема 4. Если случайная величина X принимает только неотрицательные значения, то для любого положительного числа ε выполняется неравенство

$$\mathbf{P}(X \ge \varepsilon) \le \mathbf{M}(X)/\varepsilon.$$

Теорема 5. *Неравенство Чебышёва.* Для любого положительного числа ε и любой случайной величины X выполняется неравенство

$$\mathbf{P}(\hat{X} \ge \varepsilon) \le \mathbf{D}(X)/\varepsilon^2.$$

Теорема 6. *Закон больших чисел.* Если случайная величина Y есть сумма n независимых случайных величин, у каждой из которых среднее значение равно a, а дисперсия D, то для любого положительного числа ε

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{Y}{n} - a\right| > \varepsilon\right) < \frac{D}{n\varepsilon^2}.$$

Последние теоремы типичны для теории вероятностей. Мы не можем наверняка утверждать, что результат опыта (случайная величина) или среднее арифметическое нескольких опытов отличается от истинного среднего — математического ожидания — не более чем на ε, но можем быть уверены, что вероятность большого отклонения мала. Основное содержание теории вероятностей — различные неравенства, позволяющие оценивать вероятности.

Давайте посмотрим, какую оценку дает неравенство Чебышёва для 400 бросаний симметричной монеты. Вероятность $\mathbf{P}$ того, что число выпадений цифры отличается от 200 более чем на 20, оценивается так:

$$\mathbf{P} < \frac{D}{400 \cdot (1/20)^2} = \frac{1/4}{400 \cdot (1/20)^2} = \frac{1}{4},$$

где значение $D = 1/4$.

На самом деле, существуют замечательные теоремы, позволяющие значительно точнее оценивать такие величины. Так, на последнем примере $\mathbf{P} \approx 0{,}05$. Но об этом мы поговорим в следующий раз.