..., m) образуют, очевидно, полную систему событий, так что $u_1 + u_2 + \ldots + u_m = 1$. Распределение случайной величины полностью определяет ее основные свойства — среднее значение, величину «разброса», наличие лишь одного или нескольких наиболее вероятных значений... В примере с кубиком распределение таково:

x_j	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u_j	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

А в схеме Бернулли случайная величина «число единиц» — обозначим ее z — имеет *биномиальное распределение*

$$\mathbf{P}(z=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Распределение случайной величины «оценка Феди на экзамене» из задачи 4 (обозначим ее Φ) задано таблицей или гистограммой рисунка 4.

Определение. *Средним значением* случайной величины X называется сумма

$$\mathbf{M}(X)=\sum_{i=1}^{N} w_i X(e_i)=$$
$$=w_1X(e_1)+w_2X(e_2)+\ldots+w_NX(e_N).$$

Зная распределение $\mathbf{P}(X=x_j)=u_j$ ($j = 1, 2, \ldots, m$), эту формулу можно, собрав вместе слагаемые с одинаковыми значениями $X(e_i)$, переписать в виде

$$\mathbf{M}(X)=\sum_{j=1}^{m} u_j x_j = u_1x_1+u_2x_2+\ldots+u_mx_m.$$

Среднее значение называют также *математическим ожиданием* случайной величины.

Среднее значение характеристической функции $\xi = \xi_A$ события A, принимающей только значения 0 и 1, равно вероятности события A:

$$\mathbf{M}(\xi)=\mathbf{P}(\xi=0)\cdot 0+\mathbf{P}(\xi=1)\cdot 1=$$
$$=\mathbf{P}(\xi=1)=\mathbf{P}(A).$$

Среднее значение оценки Феди равно

$$\mathbf{M}(\Phi)\approx 0{,}0076\cdot 5+0{,}0876\cdot 4+$$
$$+0{,}312\cdot 3+0{,}593\cdot 2\approx 2{,}51.$$

Среднее значение числа единиц в схеме Бернулли равно по определению

$$\mathbf{M}(Z)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}\cdot k.$$

Подсчитаем эту сумму. Поскольку при $k \ge 1$

$$C_n^k\cdot k=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot k=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}=nC_{n-1}^{k-1}$$

имеем

$$\mathbf{M}(Z)=\sum_{k=1}^{n} nC_{n-1}^{k-1}p^k(1-p)^{n-k}=$$
$$=np\sum_{k=1}^{n}p^{k-1}(1-p)^{n-k}=$$
$$=np\sum_{l=0}^{n-1}p^{l}(1-p)^{n-1-l}.$$

По формуле бинома Ньютона сумма $\sum_{l=0}^{n-1}p^l(1-p)^{n-1-l}$ равна $(p+(1-p))^n = 1$. Значит, среднее значение величины Z равно np.

Но гораздо проще считать это среднее значение при помощи следующего свойства

Теорема 1. *Среднее значение суммы $X+Y$ случайных величин X и Y равно сумме их средних:*

$$\mathbf{M}(X+Y)=\mathbf{M}(X)+\mathbf{M}(Y).$$

Доказательство. По определению,

$$\mathbf{M}(X)=w_1X(e_1)+w_2X(e_2)+\ldots+w_NX(e_N), \quad (8)$$

$$\mathbf{M}(Y)=w_1Y(e_1)+w_2Y(e_2)+\ldots+w_NY(e_N). \quad (9)$$

Складывая эти равенства почленно, получаем

$$\mathbf{M}(X)+\mathbf{M}(Y)=w_1(X(e_1)+Y(e_1))+$$
$$+w_2(Xe(e_2)+Y(e_2))+\ldots$$
$$\ldots+w_N(X(e_N)+Y(e_N))=\mathbf{M}(X+Y).$$

Разумеется, утверждение теоремы верно и для суммы нескольких случайных величин.

Чтобы применить его к нахождению $\mathbf{M}(Z)$, представим Z в виде суммы n случайных величин

$$Z=Z_1+Z_2+\ldots+Z_n,$$

где Z_j — значение j-й координаты строки $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$. Среднее значение каждого из n слагаемых равно

$$\mathbf{M}(Z_j)=p, \quad (10)$$

поэтому $\mathbf{M}(Z) = np$.

Для произведения средних не все так просто — не всегда математическое ожидание произведения равно произведению математических ожиданий. Например, если случайная величина X принимает значения 1 и −1 с равными вероятностями 1/2, то $\mathbf{M}(X) = 0$, а $\mathbf{M}(X^2) = \mathbf{M}(1) = 1$.

Определение. Случайные величины X и Y называются *независимыми*, если для любых значений x_j и y_k события $X = x_j$ и $Y = y_k$ независимы, т.е.

$$\mathbf{P}(X=x_j, Y=y_k)=\mathbf{P}(X=x_j)\mathbf{P}(Y=y_k).$$

Теорема 2. *Среднее значение произведения независимых случайных величин X и Y равно произведению их средних значений:*

$$\mathbf{M}(XY)=\mathbf{M}(X)\mathbf{M}(Y).$$

Доказательство. Пусть величина X принимает значения $x_1, x_2, \ldots, x_m$, а величина Y принимает значения $y_1, y_2, \ldots, y_l$. Обозначим $\mathbf{P}(X=x_j)=u_j$, $\mathbf{P}(Y=y_k)=v_k$. Тогда

$$\mathbf{P}(X=x_j, Y=y_k)=u_jv_k,$$

так что

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}\mathbf{P}(X=x_j,Y=y_k)x_ju_k=$$
$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}u_jv_kx_jy_k=$$
$$=\sum_{j=1}^{m}u_jx_j\cdot\sum_{k=1}^{l}v_ky_k=\mathbf{M}(X)\mathbf{M}(Y).$$

Упражнения

31. Двое играют в такую игру. Если при броске кости выпадает 1 или 2, то первый выигрывает у второго 5 очков; в противном случае второй выигрывает у первого 2 очка. Для кого эта игра выгодна — для первого или для второго игрока?

32. Я доезжаю на работу обычно либо автобусом за 20 минут, либо троллейбусом за полчаса, причем автобусом езжу втрое чаще, чем троллейбусом. В виде исключения я раз в десять дней доезжаю на такси за 10 минут и раз в десять дней хожу пешком за 1 час. Сколько времени в день в среднем я трачу на дорогу?

33. Каждым ходом игрок бросает игральную кость и получает столько очков, сколько выпадет. К тому же, если выпадет шестерка, он бросает кость второй раз за тот же ход и получает дополнительно выпавшее число очков. Сколько в среднем очков игрок получает за ход?

34. Докажите, что если случайные величины X и Y связаны соотношением $Y = aX + b$, где a и b — постоянные числа, то $\mathbf{M}(Y) = a\mathbf{M}(X) + b$.