Часто используется такая формула, вытекающая из определения условной вероятности:

$$\mathbf{P}(A\cap B)=\mathbf{P}(A)\ \mathbf{P}_A(B).$$

Между прочим, поскольку в левую часть буквы A и B входят симметрично, заодно выполняется и формула

$$\mathbf{P}(B)\ \mathbf{P}_B(A)=\mathbf{P}(A\cap B)=\mathbf{P}(A)\ \mathbf{P}_A(B).$$

Из формулы (7) легко получить формулу полной вероятности:

$$\mathbf{P}(B)=\mathbf{P}(A_1\cap B)+$$
$$+\ \mathbf{P}(A_2\cap B)+\ldots+\mathbf{P}(A_r\cap B)=$$
$$=\mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(B)+$$
$$+\ \mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}_{A_2}(B)+\ldots+\mathbf{P}(A_r)\mathbf{P}_{A_r}(B). \quad (7)$$

Упражнения

25. Мне прислали две посылки. В одной из них 20% груш, 50% яблок и 30% апельсинов, а в другой — 30% груш, 10% яблок и 60% киви. Я, зажмурив глаза, случайным образом выбираю посылку и в ней — фрукт. Какова вероятность, что я выберу апельсин?

26. Известно, что при броске кости выпало четное число. Какова вероятность того, что это число меньше пяти?

27. Докажите, что если события A и B независимы, то и события A и $\overline{B}$ независимы.

28. Двое друзей подкидывают три монеты и хотят вычислить вероятность того, что все три выпадут одной стороной — орлом или решкой. Первый утверждает, что эта вероятность равна $\frac{1}{4}$. Он рассуждает так: вероятность того, что вторая монета ляжет так же, как первая, равна $\frac{1}{2}$, а вероятность того, что третья монета ляжет тем же способом, вдвое меньше — т.е. равна $\frac{1}{4}$.

Второй утверждает, что искомая вероятность равна $\frac{1}{2}$. Он рассуждает так: какие-нибудь две из трех монет обязательно выпадут одной и той же стороной. Вероятность того, что и третья монета ляжет тем же способом, равна $\frac{1}{2}$. Кто прав?

29. Про некоторую семью известно, что там двое детей. Как-то раз мама вывела на прогулку одного (случайно выбранного) ребенка. Оказалось, что это мальчик. Что более вероятно: что второй ребенок является мальчиком или девочкой?

30 (Задача Паскаля). Два одинаково искусных игрока играют в игру, не допускающую ничейного исхода. Они сделали равные ставки и условились, что тот, кто первым наберет 10 выигранных партий, получит все деньги. Игра была прервана при счете 9 : 8 и не могла быть продолжена. Как должны они разделить деньги?

Случайная величина и среднее значение

Как мы уже говорили во введении, на практике вероятности находят, многократно повторяя опыт и вычисляя долю случаев («частоту»), в которых произошло интересующее нас событие. Например, если много раз подбросить монету, то она упадет цифрой вверх примерно в половине случаев. Такая «устойчивость частоты» при многократном повторении испытания наблюдается во многих ситуациях. Математическое объяснение этой устойчивости дал Я.Бернулли в книге «Искусство предположения», опубликованной в 1713 году. Он установил *закон больших чисел*. Если в каждом из n независимых испытаний с одной и той же вероятностью p может произойти некоторое событие A, то количество Z появлений события A не обязано в точности равняться np и может сильно отклоняться от этой величины; но вероятности значительных отклонений малы: *для всяких положительных чисел* ε *и* η *вероятность* $\mathbf{P}\left(\left|\frac{Z}{n}-p\right|>\varepsilon\right)$ *будет меньше* η *при всех достаточно больших* n.

Более простое, чем у Бернулли, доказательство закона больших чисел получится в конце следующего параграфа из неравенства Чебышёва.

В этом разделе мы будем заниматься такой задачей. Пусть некоторое событие A происходит с вероятностью p. Какова вероятность, что за n независимых испытаний оно произойдет ровно k раз?

Сначала надо придать точный смысл словам «n независимых испытаний A с одной и той же вероятностью p». Для этого служит очень важное вероятностное пространство — так называемая *схема Бернулли*. Оно состоит из 2^n элементарных событий — строк $(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ из n нулей и единиц. Вероятность, приписываемая строке, в которой k единиц и $n-k$ нулей, равна $p^k(1-p)^{n-k}$. При $p=1/2$ получается вероятностное пространство, которое описывает n бросаний симметричной монеты и встречалось в задаче 20. Заметим, что схема Бернулли (при $p\neq 1/2$) не подходит под « комбинаторное» определение вероятностного пространства E, где все «атомы» были равновероятны.

Вот более общее определение, кстати, более подходящее для практических применений.

Определение. *Конечным вероятностным пространством* называется конечное множество $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$, каждому элементу e_i которого приписано неотрицательное число w_i (называемое вероятностью элементарного события e_i), причем их сумма равна единице:

$$w_1+w_2+\ldots+w_n=1.$$

Любому событию A (подмножеству $A\subseteq E$) приписывается вероятность

$$\mathbf{P}(A)=\sum_{e_i\in A}w_i.$$

Последняя формула означает, что $\mathbf{P}(A)$ — это сумма вероятностей всех элементарных событий, из которых состоит A.

Заметим, что основные правила вычисления вероятностей (1) — (7), о которых шла речь выше, при этом сохраняются.

Далее нам потребуются другие новые понятия: случайная величина, ее распределение, ее среднее значение и т.п. Собственно, эти понятия намного старше теории вероятностей и всем хорошо знакомы: они относятся к традиционной статистике, возникшей одновременно с умением записывать числа.

Определение. *Случайной величиной* называется функция X, заданная на множестве E.

Каждому событию $A\subseteq E$ соответствует «характеристическая» случайная величина ξ_A, принимающая значения 0 и 1: $\xi_A(e)=1$, если $e\in A$, и $\xi_A(e)=0$ в противном случае (так что можно считать, что «случайная величина» — некоторое обобщение понятия «событие»).

Поскольку мы рассматриваем только конечные множества E, всякая случайная величина $X:E\to\mathbf{R}$ может быть задана набором чисел $X(e_i)$, где $i=1,2,\ldots,N$, которые можно записать в виде таблички. Например, в задаче 1 о двух бросаниях кубика величина «сумма выпавших очков» может быть представлена такой таблицей:

Элементарное событие	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(1,3)	...	(6,6)
Вероятность	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	...	$\frac{1}{36}$
X	2	3	3	4	...	12

Если вероятностное пространство состоит из большого числа элементов, то таблица становится совершенно необозримой. Между тем, обычно достаточно знать *распределение* случайной величины, т.е. перечень всех возможных ее значений $\{x_1,\ldots,x_m\}$ и вероятность $u_j=\mathbf{P}(X=x_j)$ каждого из них. Здесь $X=x_j$ — это событие «случайная величина X равна x_j»; его вероятность u_j — сумма w_i по всем e_i, для которых $X(e_i)=x_j$. События $X=x_j$ $(j=1,2,\ldots$