$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2/4! = 5$, а для $k = 5$ — 1 способ. (Впрочем, сразу можно было сообразить, что строчка ответов 1, 5, 10, 10, 5, 1 получится симметричной: ведь случаев, когда k ламп горят и остальные $5 - k$ не горят, столько же, сколько случаев, когда все наоборот.)

Вы, конечно, заметили, что, решая задачи 2 и 3 про Федю, мы именно так получали формулы для C_n^2 и C_n^3.

Точно так же выводится и общая формула для C_n^k — числа способов зажечь k ламп из n. Первую мы выбираем из n возможностей, вторую — из $(n-1)$, третью — $(n-2)$, и так k раз (при этом заметьте, что k-ю лампу мы выбираем из $n-k+1$ варианта, а вовсе не из $n-k$, как можно подумать сгоряча). А делить надо на $k!$ — число перестановок k элементов:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

Числа сочетаний C_n^k в англоязычных учебниках обозначают иначе: $\binom{n}{k}$. Они появляются в разных ситуациях. C_n^k — это

число k-элементных подмножеств множества из n элементов;

число последовательностей длины n, состоящих из k единиц и $(n-k)$ нулей;

число путей длины n из точки $(0,0)$ в точку $(k, n-k)$ по сторонам единичных клеток;

коэффициент при x^k после раскрытия скобок в выражении $(x+1)^n$.

Биномиальные коэффициенты удобно расположить в виде треугольника Паскаля (рис.6), где каждое число

$$\begin{array}{c}
1\\
1\quad 1\\
1\quad 2\quad 1\\
1\quad 3\quad 3\quad 1\\
1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1\\
1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 10\quad 1\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
C_n^0\, C_n^1\, C_n^2\ \ \ldots\ \ C_n^{n-1}\, C_n^n\\
\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

Рис. 6

равно сумме двух стоящих над ним, что соответствует формуле $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$.

Числа сочетаний еще понадобятся нам ниже.

Упражнения

15. Из города A в город B ведут 4 дороги, из B в C — 6 дорог. Сколькими способами можно проехать из A в C?

16. Сколько существует трехзначных чисел, у которых все цифры нечетны и различны?

17. Сколькими способами можно отметить 8 полей шахматной доски, чтобы никакие два отмеченных поля не лежали ни на одной вертикали, ни на одной горизонтали?

18. Сколько всего шестизначных чисел, все цифры которых нечетные?

19. Выбирают случайным образом трехзначное нечетное число. С какой вероятностью

а) все три цифры разные;

б) первая цифра равна 1;

в) первая цифра равна последней?

20. Пусть в ряд расположены n фонарей, каждый из которых горит или не горит с вероятностью $1/2$. Найдите вероятность того, что горят ровно k фонарей.

21. Из юго-западного угла квадратного города $n \times n$, разбитого улицами на единичные квадраты, выходят 2^n человек. Половина идет на север, половина — на восток. Из всех, кто дошел до очередного перекрестка, половина снова идет на север, половина — на восток. Сколько человек придет на k-й перекресток диагонали?

Сложение и умножение вероятностей

Не всегда вероятности вычисляются по формуле $\mathbf{P}(A) = |A|/N$. Иногда удается одни вероятности вычислять через другие. Например, если даны два множества A и B (содержащиеся в E), то число элементов объединения $A \cup B$ можно посчитать, сложив числа элементов множеств A и B и вычтя число элементов их пересечения $A \cap B$:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Поделив на N, получаем для вероятностей

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B). \quad (4)$$

Частный случай этой формулы — для несовместных событий A и B — формула (2).

22. *На дискотеке 80% времени был выключен свет, 90% времени играла музыка и 50% времени шел дождь. Какую наименьшую долю времени все это обязано было происходить одновременно?*

Решение. Перейдем к дополнительным событиям: свет был выключен 20% времени, музыка молчала 10%, а дождь не шел 50% времени, так что дополнительные события не могли занять более 20 + 10 + 50 = 80% времени. Следовательно, музыка под дождем в темноте звучала не меньше 100 − 80 = 20% времени.

В этой задаче мы воспользовались переходом от события A к дополнительному $E \setminus A$,[1] которое для краткости часто обозначают $\overline{A}$ (читается: «дополнение к A» или «не A»). При этом

$$\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A).$$

23. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

Подсказка. Вместо того, чтобы подсчитывать количество требуемых шестизначных чисел, определите количество шестизначных чисел, у которых все цифры нечетны.

24. *В классе 40% мальчиков и 60% девочек. Из мальчиков на роликовых коньках катается каждый второй, а из девочек — 30%. Какая доля учеников этого класса катается на роликовых коньках?*

Решение. Пусть в классе n человек. Тогда мальчиков всего $0{,}4n$, а девочек $0{,}6n$. Значит, катаются $0{,}5 \cdot 0{,}4n$ мальчиков и $0{,}3 \cdot 0{,}6n$ девочек, так что искомая доля равна

$$\frac{0{,}5 \cdot 0{,}4n + 0{,}3 \cdot 0{,}6n}{n} = 0{,}5 \cdot 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}38.$$

Последняя формула, если бы речь шла не о процентах и долях, а о вероятностях, называлась бы *формулой полной вероятности*. В общем виде она выглядит так: если $A_1, A_2, \ldots, A_r$ — полная система событий, то

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(B) + \mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}_{A_2}(B) + \ldots + \mathbf{P}(A_r)\mathbf{P}_{A_r}(B). \quad (5)$$

Объясним обозначения. Пусть A и B — два события (например, A — «быть мальчиком», B — «кататься на коньках»). Тогда *условной вероятностью* $P_A(B)$ *события* B *при условии* A называется отношение $\mathbf{P}(A \cap B)/\mathbf{P}(A)$. (В нашем примере $\mathbf{P}_A(B) = 0{,}5$, $\mathbf{P}_{\overline{A}}(B) = 0{,}3$.)

Чтобы пояснить это определение, вспомним комбинаторное определение вероятности. Если мы желаем перейти от всего пространства E к меньшему пространству A, то следует учитывать только те элементы из B, которые содержатся в A, а их количество равно $|A \cap B|$. При этом $\mathbf{P}(A \cap B) = |A \cap B|/|E|$ и $\mathbf{P}(A) = |A|/|E|$. Отсюда и получается формула условной вероятности

$$\mathbf{P}_A(B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{|A \cap B|}{|A|}.$$

Условную вероятность $\mathbf{P}_A(B)$ обозначают и так: $\mathbf{P}(B|A)$. Некоторым больше нравится одно обозначение, некоторым — другое.

[1] *Вообще, для любых двух множеств X и Y через $X \setminus Y$ обозначают множество тех элементов из X, которые не принадлежат Y.*