жащиеся в E) не пересекаются, то говорят, что события A и B *несовместны*. При этом вероятность того, что происходит хотя бы одно из них — вероятность попасть в A или в B, — равна сумме вероятностей событий A и B:

$$\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B). \qquad (2)$$

Мы пользовались этим выше в решении пункта г) задачи 4.

Упражнения

5. Предположим, что Федя знал ответы не на 10, а на 20 вопросов из 30. Каковы тогда были бы вероятности получить оценки 2, 3, 4, 5? Нарисуйте соответствующую гистограмму.

6. 20 человек написали письма друг другу. Сколько всего писем было послано? (Каждый написал письма всем остальным, по одному письму каждому.)

7. 15 гроссмейстеров провели турнир, в котором каждые двое сыграли между собой одну партию. Сколько партий было сыграно?

8. Среди двузначных чисел случайным образом выбираем одно число. С какой вероятностью а) его цифра десятков больше цифры единиц; б) обе цифры равны; в) это число делится на 9?

9. Из 25 учеников класса, в котором учатся Денис, Данила и Димитрий, случайным образом выбрали 10 учеников, которые должны прийти на экзамен к 9 утра, и 10 человек, которые должны прийти к 12 часам. Остальные 5 учеников должны прийти к 14 часам. Какова вероятность, что Денис, Данила и Димитрий а) втроем попадут в первую группу; б) попадут в одну и ту же группу; в) попадут в три разные группы?

Правило произведения. Перестановки и сочетания

Решая задачи про Федю, мы подсчитывали количества разных комбинаций: перестановок, подмножеств конечного множества и тому подобное. Как мы это делали? Основной прием, которым мы пользовались, — правило произведения. Каждый понимает, что если в лесу 100 елок, у каждой елки 20 веток, на каждой ветке 40 лапок, а на каждой лапке 70 иголок, то всего в лесу $100 \cdot 20 \cdot 40 \cdot 70$ иголок.

Вообще, *если объект x можно выбрать m способами и если после каждого такого выбора объект y можно выбрать n способами, то выбор пары (x,y) можно осуществить mn способами.*

Особенно простой вид правило произведения приобретает, если выбор второго элемента y пары (x,y) совсем не зависит от x. Тогда все mn пар удобно записать в таблицу (рис.5).

$$\begin{array}{cccc} (x_1,y_1) & (x_1,y_2) & \ldots & (x_1,y_n) \\ (x_2,y_1) & (x_2,y_2) & \ldots & (x_2,y_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (x_m,y_1) & (x_m,y_2) & \ldots & (x_m,y_n) \end{array}$$

Рис. 5

10. *В магазине «Все для чая» есть 5 разных чашек и 3 разных блюдца. Сколькими способами можно купить чашку и блюдце?*

Решение. Выберем чашку. В комплект к ней можно выбрать любое из трех блюдец. Поскольку чашек всего 5, то число различных комплектов равно 15 ($15 = 3 \cdot 5$).

11. *В магазине «Все для чая» есть еще 4 чайные ложки. Сколькими способами можно купить комплект из чашки, блюдца и ложки?*

Решение. Выберем любой из 15 комплектов предыдущей задачи. Его можно дополнить ложкой четырьмя различными способами. Поэтому общее число возможных комплектов равно $60 = 15 \cdot 4 = 5 \cdot 3 \cdot 4$.

12. *Выбирают случайным образом шестизначное число. С какой вероятностью вторая его цифра равна 3, а четвертая четна?*

Решение. Всего шестизначных чисел 900000. Из них удовлетворяют условию $9 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10$ чисел, так что вероятность равна

$$\frac{9 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10}{9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{10} = 0{,}05\,.$$

Заметьте, что ответ равен произведению $\frac{1}{10}$ (это вероятность того, что вторая цифра равна 3) и $\frac{5}{10}$ (это вероятность того, что четвертая цифра четна). С этим мы уже встречались в задаче 1, а), где вероятность оказалась равной произведению $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$.

Объясним, почему так получается. Представим себе, что мы случайным образом выбираем одну из $N = mn$ клеток таблицы $m \times n$ (см. рис.5), причем событие A состоит в том, что клетка попадает в одну из заданных k строк, а B — что она попадает в один из заданных l столбцов. Тогда пересечение $A \cap B$ состоит из kl клеток и поэтому

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \frac{kl}{N} = \frac{k}{m} \cdot \frac{l}{n} = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

Вообще, два события A и B называются *независимыми*, если

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\ \mathbf{P}(B). \qquad (3)$$

13. *В ряд расположены n фонарей. Сколькими способами можно осветить улицу, считая и тот «способ освещения», когда ни один фонарь не горит? (Говоря математическим языком, надо подсчитать количество подмножеств множества из n элементов.)*

Решение. Первый фонарь может находиться в двух состояниях: гореть или не гореть. Независимо от него второй фонарь может гореть или не гореть. Значит, первые два фонаря могут находиться в $2 \cdot 2 = 4$ состояниях. Добавляя третий фонарь, мы удвоим число возможных состояний. Точно так же, добавление каждого следующего фонаря будет удваивать число состояний. Таким образом, имеется 2^n способов освещения n фонарями.

Заодно мы посчитали количество последовательностей длины n из нулей и единиц. Оно равно 2^n. В само деле, зажженный фонарь можно обозначать единицей, а негорящий — нулем. (Тогда последовательность из n нулей означает, что ни один фонарь не горит, т.е. соответствует пустому множеству. А последовательность из n единиц означает, что все фонари горят.)

Используя правило произведения, легко посчитать общее количество *перестановок*, которые можно составить из n элементов, т.е. количество способов, которыми можно все эти элементы расположить в ряд. Мы уже видели, что оно равно 6 для $n = 3$ и 24 для $n = 4$. В общем случае оно равно

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

В самом деле, если нам нужно расположить в строку n элементов, то первый можно выбрать n способами, после чего второй можно выбрать $(n-1)$ способами, после каждого выбора первого и второго третий — $(n-2)$ способами,..., предпоследний элемент выбирается из двух оставшихся к этому моменту, а последний определен однозначно.

Займемся теперь не менее важными для комбинаторики и теории вероятностей числами сочетаний C_n^k. Мы получим их, решая следующую задачу.

14. *В ряд расположены 5 лампочек. Сколькими способами можно зажечь k из них (для каждого k = 0, 1, 2, 3, 4 и 5)? А если лампочек n?*

Решение. 0 ламп можно «зажечь» только одним способом — ни одну не зажигать. 1 лампу из 5 можно выбрать 5 способами, 2 лампы из 5 — 10 способами (действительно, первую можно зажечь 5 способами, после этого остается 4 возможности зажечь вторую лампу; но число $5 \cdot 4$ надо разделить пополам, ибо когда лампы горят, не ясно, какая была зажжена раньше).

Для $k = 3$ ламп получим ответ $5 \cdot 4 \cdot 3/3! = 10$, для $k = 4$ получим